

HAUPTAUFSÄTZE

Die asymptotischen Entwicklungen für die beiden parabolischen Funktionen $M_{\kappa, \mu/2}(z)$ und $W_{\kappa, \mu/2}(z)$ bei großen Werten von κ und z für $-\infty < z/4\kappa < +\infty$

Von Herbert Buchholz in Darmstadt

In der vorliegenden Arbeit werden die asymptotischen Entwicklungen der parabolischen Funktionen $M_{\kappa, \mu/2}(z)$ und $W_{\kappa, \mu/2}(z)$ bei großen Werten von κ und z bis einschließlich zu den Gliedern 2. Ordnung in $1/\kappa$ hergeleitet, und zwar mittels der Sattelpunktmethode. Die Darstellung beschränkt sich auf den zunächst wichtigsten Fall, daß das Verhältnis $z/4\kappa$ einer beliebigen positiv oder negativ reellen Zahl gleich ist. z und κ selbst können jedoch komplex sein.

The paper gives the asymptotical expansions of the parabolic functions $M_{\kappa, \mu/2}(z)$ and $W_{\kappa, \mu/2}(z)$ for large values of κ and z up to the terms of the second order in $1/\kappa$. The derivation is accomplished by aid of the „Sattelpunktmethode“. The formula is limited to the case that is till now the most important, namely that the ratio $z/4\kappa$ is any positive or negative real quantity while z and κ themselves may be complex.

Dans ce travail les développements asymptotiques sont donnés des fonctions paraboliques $M_{\kappa, \mu/2}(z)$ et $W_{\kappa, \mu/2}(z)$ pour grandes valeurs de κ et de z jusqu'à les termes du deuxième ordre en $1/\kappa$, et cela à l'aide de la „Sattelpunktmethode“. L'auteur se borne au cas, qui est d'abord le plus important, c'est que le quotient $z/4\kappa$ soit réel (positif ou négatif). z et κ pourtant peuvent être choisis complexes.

В этой работе дается асимптотическое разложение параболических функций $M_{\kappa, \mu/2}(z)$ и $W_{\kappa, \mu/2}(z)$ при больших значениях κ и z включая до членов второго порядка относительно $1/\kappa$. Это разложение производится при помощи метода „гиперболических точек“ для наиболее важного случая, когда отношение $z/4\kappa$ равняется любой положительной или отрицательной вещественной величине, тогда как сами z и κ могут быть и комплексными величинами.

1.1. Allgemeines über die parabolischen Funktionen und über die hier benutzte Integraldarstellung. Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Herleitung der asymptotischen Entwicklungen (abgek.: as. Entw.) der beiden parabolischen Funktionen $M_{\kappa, \mu/2}(z)$ und $W_{\kappa, \mu/2}(z)$ mit den Definitionsgl. (1) und (2).

$$\left. \begin{aligned} M_{\kappa, \frac{\mu}{2}}(z) &= z^{\frac{1+\mu}{2}} \cdot e^{-z/2} \cdot {}_1F_1\left(\frac{1+\mu}{2} - \kappa; 1+\mu; z\right) \\ &= z^{\frac{1+\mu}{2}} \cdot e^{+z/2} \cdot {}_1F_1\left(\frac{1+\mu}{2} + \kappa; 1+\mu; -z\right) = e^{\mp \frac{\pi i}{2}(1+\mu)} \cdot M_{-\kappa, \frac{\mu}{2}}(z \cdot e^{\pm \pi i}) \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

$(z = |z| \cdot e^{+i\zeta} \text{ bel.})$

$$\left. \begin{aligned} W_{\kappa, \frac{\mu}{2}}(z) &= \frac{\pi}{\sin(\pi\mu)} \cdot \left\{ -\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1-\mu}{2} - \kappa\right)} \cdot \frac{M_{\kappa, \frac{\mu}{2}}(z)}{\Gamma(1+\mu)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2} - \kappa\right)} \cdot \frac{M_{\kappa, -\frac{\mu}{2}}(z)}{\Gamma(1-\mu)} \right\} = W_{\kappa, -\frac{\mu}{2}}(z) \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

In (1) sei die Potenz $z^{(1+\mu)/2}$ durch die Festsetzung $z^{(1+\mu)/2} = \exp\left(\frac{1+\mu}{2} \cdot [\ln|z| + i\zeta]\right)$ mit $\zeta = 0$ für ein $z = x > 0$ eindeutig definiert. Unter Beachtung dieser Übereinkunft sollen dann die Gl. (1) und (2) per definitionem für jeden beliebigen endlichen Wert von z gelten. In der Literatur werden die beiden Funktionen (1) und (2) für gewöhnlich als die Whittakerschen

konfluenten hypergeometrischen Funktionen bezeichnet. Da sie jedoch in den Anwendungen auf die klassische Physik der Wellenfortpflanzung in einem auf die Koordinaten des Drehparabols bezogenen Raum die gleiche Rolle spielen wie die Zylinderfunktionen in einem auf Zylinderkoordinaten bezogenen Raum, so sollen sie in dieser Arbeit parabolische Funktionen genannt werden.

Für das Folgende ist daran zu erinnern, daß zwar nach (2) $W_{\kappa, \mu/2}(z)$ eine in μ gerade Funktion darstellt. Die beiden Funktionen $M_{\kappa, \mu/2}(z)$ und $M_{\kappa, -\mu/2}(z)$ sind aber nach (1) im allgemeinen verschieden und bilden für ein $\mu \neq m = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$ ein linear unabhängiges Lösungssystem der D. Gl. (3) der parabolischen Funktionen.

$$y'' + y \left(-\frac{1}{4} + \frac{\kappa}{z} + \frac{1-\mu^2}{4z^2} \right) = 0 \quad \dots \dots \dots (3)$$

$$W_{0, \frac{\mu}{2}}(z \cdot e^{\pm \pi i}) = \frac{1}{2} \cdot (\pi z)^{\frac{1}{2}} \cdot e^{\mp \frac{\pi i}{4} \cdot \mu} \cdot H_{\frac{\mu}{2}}^{(2)} \left(\pm \frac{iz}{2} \right) \quad \dots \dots \dots (4).$$

Umgekehrt stehen zwar nach Gl. (1) die beiden Funktionen $M_{\kappa, \mu/2}(z)$ und $M_{-\kappa, \mu/2}(z \cdot e^{\pm \pi i})$ in einem einfachen Zusammenhang miteinander. Die beiden entsprechenden W -Funktionen sind aber im Gegenteil die beiden einzigen Lösungen dieser D. Gl., die für alle Werte von z , κ und μ voneinander linear unabhängig sind. Sie entsprechen in dieser Hinsicht den beiden Hankel'schen Funktionen, die sie gemäß Gl. (4) für $\kappa = 0$ als Sonderfälle enthalten.

Die gesuchte as. Entw. wird nach der Sattelpunktmethode (abgek. Sp.-Methode) hergeleitet werden. Für eine möglichst ergiebige Anwendung dieses Verfahrens ist es wesentlich, eine geeignete Integraldarstellung zu benutzen. Ein maßgebender Gesichtspunkt für ihre Auswahl ist der, daß zum mindesten der schnell veränderliche Bestandteil des Integranden im Sp.-Integral, der den Verlauf der Paßwege bestimmt, eine eindeutige Funktion von möglichst einfachem Aufbau ist und daß sich die Integraldarstellungen für die verschiedenen Lösungen der D. Gl. (3) höchstens in ihrer Wegführung, nicht aber in ihrem Integranden voneinander unterscheiden. Dabei bildet dann das Ideal, daß sich die maßgebenden Integrationswege bis ins Unendliche erstrecken, weil in diesem Falle die freie Verschiebbarkeit komplexer Integrationswege am besten ausgenutzt werden kann.

Nun läßt sich zwar im vorliegenden Falle diese letzte Forderung nicht im wörtlichen Sinne erfüllen, wohl aber dem Wesen der Sache nach. Benutzt man nämlich die durch Gl. (5) beschrie-

$$F(s) = e^{2\kappa \cdot s - (z/2) \cdot \mathfrak{I} \mathfrak{G} s} \cdot (\mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{I} s)^{-(1+\mu)} \quad \text{tg } \psi = \mathfrak{I} \mathfrak{G} s_1 \cdot \text{tg } s_2 \text{ mit } \psi = \text{arc } (\mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{I} s) \quad \dots \dots (5)$$

$$s = s_1 + i \cdot s_2$$

bene Funktion $F(s)$ als Integranden, in dem allein die Exponentialfunktion den schnell veränderlichen Bestandteil bildet, so ist es in der Tat möglich, die auf der linken Seite der Gl. (6a...k)

$$\frac{M_{\kappa, \frac{\mu}{2}}(z)}{\Gamma(1+\mu)} = \frac{z^{\frac{1+\mu}{2}}}{2^\mu \cdot \Gamma\left(\frac{1+\mu}{2} - \kappa\right) \Gamma\left(\frac{1+\mu}{2} + \kappa\right)} \cdot \int \dots \dots \dots (I) \quad \dots \dots \dots (6a)$$

$$W_{\kappa, \frac{\mu}{2}}(z) = \frac{\Gamma\left(\kappa + \frac{1-\mu}{2}\right)}{2^\mu} \cdot \frac{z^{\frac{1+\mu}{2}}}{2\pi i} \cdot \int \dots \dots \dots (II) \quad \dots \dots \dots (6b)$$

$$W_{-\kappa, \frac{\mu}{2}}(z \cdot e^{+\pi i}) = \frac{\Gamma\left(-\kappa + \frac{1-\mu}{2}\right)}{2^\mu} \cdot \frac{(z \cdot e^{+\pi i})^{\frac{1+\mu}{2}}}{2\pi i} \cdot \int \dots \dots \dots (III) \quad \dots \dots \dots (6c)$$

$$W_{-\kappa, \frac{\mu}{2}}(z \cdot e^{-\pi i}) = \frac{\Gamma\left(-\kappa + \frac{1-\mu}{2}\right)}{2^\mu} \cdot \frac{(z \cdot e^{-\pi i})^{\frac{1+\mu}{2}}}{2\pi i} \cdot \int \dots \dots \dots (IV) \quad \dots \dots \dots (6d)$$

$$W_{+\kappa, \frac{\mu}{2}}(z) = \frac{z^{\frac{1+\mu}{2}}}{2^\mu \cdot \Gamma\left(\frac{1+\mu}{2} - \kappa\right)} \cdot e^{-\pi i \left(\kappa - \frac{1+\mu}{2}\right)} \cdot \int \dots \dots \dots (V) \quad \dots \dots \dots (6e)$$

$$W_{\kappa, \frac{\mu}{2}}(z) = \frac{z^{\frac{1+\mu}{2}}}{2^\mu \cdot \Gamma\left(\frac{1+\mu}{2} - \kappa\right)} \cdot e^{+\pi i \left(\kappa - \frac{1+\mu}{2}\right)} \cdot \int \dots \dots \dots (VI) \quad (6f)$$

$$W_{-\kappa, \frac{\mu}{2}}(z \cdot e^{+\pi i}) = \frac{z^{\frac{1+\mu}{2}}}{2^\mu \cdot \Gamma\left(\kappa + \frac{1+\mu}{2}\right)} \cdot e^{-\pi i \kappa} \cdot \int \dots \dots \dots (VII) \quad (6g)$$

$$W_{-\kappa, \frac{\mu}{2}}(z \cdot e^{-\pi i}) = \frac{z^{\frac{1+\mu}{2}}}{2^\mu \cdot \Gamma\left(\kappa + \frac{1+\mu}{2}\right)} \cdot e^{+\pi i \kappa} \cdot \int \dots \dots \dots (VIII) \quad (6h)$$

$$\frac{M_{\kappa, -\frac{\mu}{2}}(z)}{\Gamma(1-\mu)} = \frac{z^{\frac{1+\mu}{2}}}{2^\mu} \cdot \frac{e^{+\pi i \left(\kappa + \frac{1+\mu}{2}\right)}}{2\pi i} \cdot \int \dots \dots \dots (IX) \quad (6i)$$

$$\frac{M_{\kappa, -\frac{\mu}{2}}(z)}{\Gamma(1-\mu)} = \frac{z^{\frac{1+\mu}{2}}}{2^\mu} \cdot \frac{e^{-\pi i \left(\kappa + \frac{1+\mu}{2}\right)}}{2\pi i} \cdot \int \dots \dots \dots (X) \quad (6k)$$

Integrand stets: $F(s) \cdot ds$

aufgeführten Funktionen alle durch die Integrale I...X über ein und dieselbe Funktion $F(s)$ von Gl. (5) darzustellen; wenn man dementsprechend die Integration längs den in Abb. 1 mit I...X bezeichneten Wegen erstreckt. Dabei scheinen allerdings einige dieser Wege, weil sie allein zwischen den im Endlichen gelegenen Punkten $\pm \pi i/2$ der s -Ebene verlaufen, mit der zuletzt aufgestellten Forderung nicht im Einklang zu stehen. Diese beiden Punkte sind aber wesentlich singuläre Stellen des Integranden, und wir werden noch sehen, daß, wenn nur die Integrationswege in geeigneter Richtung in sie hineinlaufen, sie sich in nichts von dem Verhalten der Wege in der Nachbarschaft des Punktes ∞ unterscheiden. Das Integral (6a) wurde bereits in dem Bericht des Verfassers [1] angegeben. Die anderen findet man durch geeignete Kombination von je zweien oder dreien von ihnen, indem man dabei von den Gl. (2), (7a, b)

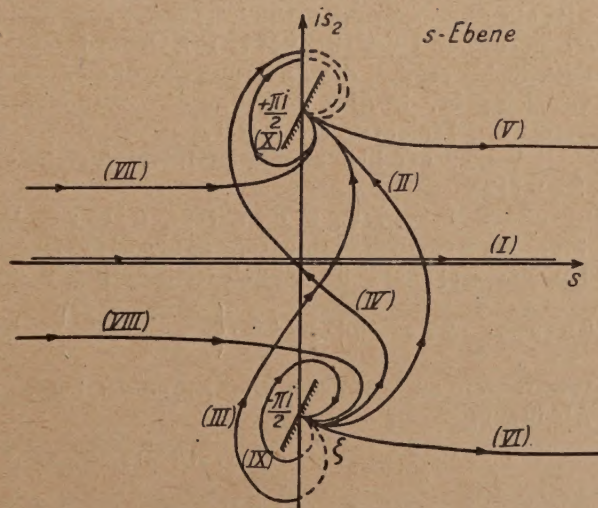


Bild 1. Die Integrationswege der zehn Integrale der Gl. 1.1 (a...k). Die Pfeile bezeichnen die Integrationsrichtung.

$$\frac{M_{\kappa, \frac{\mu}{2}}(z)}{\Gamma(1+\mu)} = \frac{\Gamma\left(\frac{1-\mu}{2} + \kappa\right)}{2\pi i} \cdot \left\{ e^{+\pi i \cdot \frac{1+\mu}{2}} \cdot W_{-\kappa, \frac{\mu}{2}}(z \cdot e^{+\pi i}) - e^{-\pi i \cdot \frac{1+\mu}{2}} \cdot W_{-\kappa, \frac{\mu}{2}}(z \cdot e^{-\pi i}) \right\} \quad (7a)$$

$$W_{\kappa, \frac{\mu}{2}}(z) = \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2} + \kappa\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1-\mu}{2} + \kappa\right)}{2\pi i} \cdot \left\{ e^{+\pi i \kappa} \cdot W_{-\kappa, \frac{\mu}{2}}(z \cdot e^{+\pi i}) - e^{-\pi i \kappa} \cdot W_{-\kappa, \frac{\mu}{2}}(z \cdot e^{-\pi i}) \right\} \right\} \quad (7b)$$

$$\frac{M_{\kappa, \frac{\mu}{2}}(z)}{\Gamma(1+\mu)} = \frac{e^{\pm \pi i \kappa}}{\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2} - \kappa\right)} \cdot W_{-\kappa, \frac{\mu}{2}}(z \cdot e^{\pm \pi i}) + \frac{e^{\pm \pi i \left(\kappa - \frac{1+\mu}{2}\right)}}{\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2} + \kappa\right)} \cdot W_{\kappa, \frac{\mu}{2}}(z) \dots \dots (8)$$

(entw. ob. oder unt. Vorz.)

und (8) Gebrauch macht, die ihrerseits aus (1) und (2) folgen. Es versteht sich, daß nicht alle Integrale in (6) für die gleichen Werte von μ und κ konvergieren. Auch müssen bei einigen von ihnen μ und κ bestimmte Forderungen erfüllen. So muß z. B. bei Gl. (6e) $\Re(\kappa - (1 + \mu)/2) < 0$ sein.

Im Hinblick auf die späteren Angaben ist noch ein Hinweis auf den Phasenwinkel von $\mathfrak{Cof} s$ in der Potenz $(\mathfrak{Cof} s)^{-(1+\mu)}$ erforderlich. Setzen wir darüber ein für allemal fest, daß für einen Punkt $s = s_1 + i s_2$ in dem Horizontalstreifen zwischen den Punkten $\pm \pi i/2$ im Hinblick auf die Gl. (5) $|\arg(\mathfrak{Cof} s)| < \pi/2$ ist, so liegt der Phasenwinkel von $\mathfrak{Cof} s$ für einen Punkt $s = s_1 + i s_2 + \pi i p$ um πp höher, wenn $s_1 > 0$ ist, und um πp niedriger, wenn $s_1 < 0$ ist. Liegt mithin der Integrationsweg wie im Falle der Gl. (6b) ganz auf einer Seite der imaginären s -Achse, so kann man auch für $W_{\kappa, \mu/2}(z)$ eine Integraldarstellung angeben, in der das Integral zwischen den Punkten $+\pi i/2 \cdot (2p - 1)$ und $+\pi i/2 \cdot (2p + 1)$ verläuft. Sie hat die Gestalt der Gl. (9), wenn darin der Phasenwinkel von $\mathfrak{Cof} s$ dem im Halbstreifen zwischen diesen beiden Punkten für $s_1 > 0$ entspricht.

$$W_{\kappa, \frac{\mu}{2}}(z) = \frac{\Gamma\left(\kappa + \frac{1-\mu}{2}\right)}{2^\mu} \cdot \frac{z^{\frac{1+\mu}{2}}}{2\pi i} \cdot e^{-2\kappa \cdot \pi i p + \pi i p(1+\mu)} \int_{+\frac{\pi i}{2}(2p-1)}^{+\frac{\pi i}{2}(2p+1)} F(s) \cdot ds \dots \dots \dots (9).$$

($p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

Verläuft ein Integrationsweg, wie es gemäß Abb. 1 vorkommt, teils in der linken, teils in der rechten s -Halbebene, so hat das solange nichts auf sich, als das Hinüberwechseln von der einen auf die andere Seite im Fundamentalstreifen $-\pi i/2 \dots + \pi i/2$ stattfindet, weil sich in diesem Streifen der $\arg(\mathfrak{Cof})$ stetig ändert. Innerhalb aller anderen Streifen ist jedoch mit diesem Übertritt ein Phasensprung verknüpft, es sei denn, man trifft ausdrücklich die Festsetzung, daß bei einem solchen Übertritt, wie er z. B. beim Integral (IV) oberhalb des Punktes $+\pi i/2$ von links nach rechts erfolgt, die Änderung des Phasenwinkels von $\mathfrak{Cof} s$ im Sinne der stetigen Änderung vor sich geht. In Abb. 1 wird an diese Vereinbarung durch Strichelung des bis dahin voll ausgezogenen Linienzuges erinnert.

Wegen der hier benutzten Integraldarstellung vergleiche man auch die Arbeit von Th. Se x l [2].

1.2. Die Lage der Sp., die as. Entw. der Sp.-Integrale und die Sp.-Wege. In dem Integral, das hier zur Definition der parabolischen Funktionen benutzt wird, hat der Exponent im schnell veränderlichen Bestandteil seines Integranden das Aussehen

$$2\kappa \cdot s - \frac{z}{2} \cdot \mathfrak{I}g s = |\kappa| \cdot 2 e^{+i\varphi} \cdot \left\{ s - \frac{z}{4\kappa} \cdot \mathfrak{I}g s \right\} = |\kappa| \cdot f(s) \quad (\kappa = |\kappa| \cdot e^{i\varphi}, z = |z| \cdot e^{i\zeta}) \dots (1a)$$

Wir führen darin für den Quotienten der beiden großzahligen Parameter z und κ die ständige Abkürzung

$$\left. \begin{aligned} \frac{z}{4\kappa} &\equiv \xi + i\eta = r \cdot e^{i(\zeta - \varphi)} = \mathfrak{Cof}^2 \gamma = \mathfrak{Cof}^2(\alpha + i\beta) \\ &= \frac{1 + \mathfrak{Cof}(2\gamma)}{2} = \frac{1}{2} \cdot \{1 + \mathfrak{Cof} 2\alpha \cdot \cos 2\beta + i \cdot \sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta\} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

ein. Dann läßt sich damit die Gl. (1a) in der Form der Gl. (1b) schreiben.

$$|\kappa| \cdot f(s) = z/2 \cdot [s \cdot (1 - \mathfrak{I}g^2 \gamma) - \mathfrak{I}g s] \dots \dots \dots (1b),$$

$$|\kappa| \cdot f'(s) = z/2 \cdot [\mathfrak{I}g^2 s - \mathfrak{I}g^2 \gamma] \dots \dots \dots (1c).$$

Aus ihr folgt im Hinblick auf (1c), daß die Integrale der Gl. 1.1 (6) die unendlich vielen Gitterpunkte der Gl. (3) zu Sp. haben.

$$s = S_k(\pm \gamma) = \pm \gamma + \pi i k \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \dots \dots \dots (3).$$

Wir werden die Punkte $\pm \gamma$ als die Hauptsp. bezeichnen und die übrigen ebenfalls paarweise auftretenden Punkte als die Nebensp.

Wir bedürfen dann vor allen Dingen einer Berechnungsvorschrift für die Größe $\gamma = \alpha + i\beta$ bei gegebenen Werten von $z/4\kappa = \xi + i \cdot \eta$. Sie wird durch das aus (2) folgende Gleichungspaar

$$\mathfrak{Cof} 2\alpha \cdot \cos 2\beta = 2\xi - 1 \dots \dots \dots (4a),$$

$$\sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta = 2\eta \dots \dots \dots (4b),$$

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{Cof} 2\alpha \\ \cos 2\beta \end{aligned} \right\} = \left| \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \right| \pm \left| \sqrt{1 - \xi^2 + \eta^2} \right| \dots \dots \dots (4\alpha, \beta),$$

(4a, b) dargestellt, das sich explizite durch die Gl. (4 α , β) auflösen läßt. Wir heben als besondere Folgerung aus dieser letzten Gleichung hervor: Es ist für $\eta = 0$ und

$$\begin{array}{lll} 1. -\infty < \xi \leq 0 & 2. 0 \leq \xi \leq 1 & 3. 1 \leq \xi < \infty \\ \infty > \alpha \geq 0, \beta = +\frac{\pi}{2} & \alpha = 0, \frac{\pi}{2} \geq \beta \geq 0 & 0 \leq \alpha < \infty, \beta = 0. \end{array}$$

Die beiden Hauptsp. $\pm \gamma$, die für $\gamma \neq 0$ getrennt liegen, fallen demnach zusammen, wenn $z/4\kappa = 1$ ist. Der Nullpunkt der s -Ebene ist dann ein Sp. 2. Ordnung. Ferner merken wir an, daß in den Sp. (3) der Realteil von $f(s)$, der die Betragshöhe des schnell veränderlichen Bestandteils der Sp.-integrale 1.1 (6) bestimmt, sich aus der Gl. (5) berechnet.

$$\Re \{f(\pm \gamma + \pi i k)\} = -2\pi k \cdot \sin \nu \pm \sin \nu \cdot (\cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta - 2\beta) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \mp \cos \nu \cdot (\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta - 2\alpha) \end{array} \right\} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots) \quad (5).$$

Die Nebensp. liegen also nur für ein reellwertiges κ mit $\nu = 0$ auf der gleichen Höhe wie die Hauptsp. Hingegen liegen die beiden Hauptsp. $\pm \gamma$ selbst auf gleicher Höhe, wenn die Gl. (6) erfüllt ist. Das ist z. B. für $\alpha = \nu = 0$ der Fall.

$$\cos \nu \cdot [2\alpha - \sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta] = \sin \nu \cdot [2\beta - \cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta] \quad (6).$$

Wir bringen die Integrale 1.1 (6) auf die für die Anwendung der Sp.-Methode geeignete Form. Wir sehen dabei zunächst von jeglichem Faktor vor dem Integralzeichen ab und nehmen die Integrale zwischen den Punkten S_0 und S_1 , über deren Lage noch Genaueres zu sagen sein wird. Dann läßt sich das auf das Hauptsp.-Paar $\pm \gamma$ bezogene Integral in der Form der Gl.

$$Y_{\kappa}(\pm \gamma) = \frac{e^{\pm i\kappa \cdot f(+\gamma)}}{(\cos \gamma)^{\mu+1}} \cdot \int_{S_0}^{S_1} e^{i\kappa \cdot [f(s) \mp f(+\gamma)]} \cdot \frac{ds}{[\cos(s \mp \gamma) \pm \sin \gamma \cdot \sin(s \mp \gamma)]^{1+\mu}} \quad (7)$$

$$f(+\gamma) = e^{i\nu} \cdot [2\gamma - \sin 2\gamma] \quad (7a)$$

schreiben. Entwickelt man hierin $f(s) - f(\gamma)$ in der Umgebung von $s = \gamma$ gemäß Gl. (8) nach dem Taylor'schen Lehrsatz,

$$\left. \begin{aligned} f(s) - f(\gamma) &= -(s - \gamma)^2 \cdot \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{2 \cdot e^{i\nu}}{(\lambda+2)!} \cdot \cos^2 \gamma \cdot \sin^{(\lambda+2)} \gamma \cdot (s - \gamma)^{\lambda} \\ &\equiv -(s - \gamma)^2 \cdot \sum_{\lambda=0}^{\infty} b_{\lambda} \cdot (s - \gamma)^{\lambda} \end{aligned} \right\} \quad (8),$$

so berechnen sich für die ersten fünf Koeffizienten b_{λ} dieser Entwicklung die Ausdrücke (8a). Auch hieraus folgt erneut, daß im Falle $\gamma = 0$ in $s = \gamma$ ein Sp. 2. Ordnung vorliegt.

$$\left. \begin{aligned} b_0 &= -2 \cdot e^{i\nu} \cdot \sin \gamma & b_1 &= 2 \cdot e^{i\nu} \cdot \left(\sin^2 \gamma - \frac{1}{3} \right) & b_2 &= -2 \cdot e^{i\nu} \cdot \sin \gamma \cdot \left(\sin^2 \gamma - \frac{2}{3} \right) \\ b_3 &= 2 \cdot e^{i\nu} \cdot \left(\sin^4 \gamma - \sin^2 \gamma + \frac{2}{15} \right) & b_4 &= -2 \cdot e^{i\nu} \cdot \sin \gamma \cdot \left(\sin^4 \gamma - \frac{4}{3} \cdot \sin^2 \gamma + \frac{17}{45} \right) \end{aligned} \right\} \quad (8a)$$

Die Kenntnis von b_0 nach Gl. (8a) erlaubt, eine genaue Aussage über den Neigungswinkel der Tangente an den Weg steilsten Gefälles, die sog. Falllinie, im Sp. $+\gamma$ zu machen. Wird nämlich gemäß Gl. (9a) der Phasenwinkel von $\sin \gamma$ mit τ_0 bezeichnet, so stehen mithin zur Berechnung von τ_0 die Formeln

$$\sin \gamma = \sin(\alpha + i\beta) = \frac{\sin 2\alpha + i \cdot \sin 2\beta}{\cos 2\alpha + \cos 2\beta} = |\sin \gamma| \cdot e^{i\tau_0} \quad (9a)$$

$$\operatorname{tg} \tau_0 = \frac{\sin 2\beta}{\sin 2\alpha} \quad (9b)$$

$$\operatorname{tg} 2\tau_0 = \frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2 - \xi} \quad (9c)$$

zur Verfügung.

Man rechnet mit ihrer Hilfe leicht aus, daß dann z. B. für $\eta = 0$ und

$$\begin{array}{lll} 1. -\infty < \xi < 0 & 2. 0 < \xi < 1 & 3. 1 < \xi < +\infty \\ \tau_0 = 0 & \tau_0 = \pm \frac{\pi}{2} \text{ für } \beta = \pm \frac{\pi}{2} & \tau_0 = 0 \end{array}$$

ist. Andererseits ist in erster Näherung mit $s \mp \gamma = \varrho(\pm) \cdot e^{i\varphi}$ nach den Gl. (8) und (8a) am Sp. $\pm \gamma$

$$|\kappa| \cdot \{f(s) - f(\pm \gamma)\} = \pm 2 |\kappa| \cdot |\sin \gamma| \cdot \varrho_{(\pm)}^2 \cdot e^{i(\nu + \tau_0 + 2\varphi)}.$$

Demnach gibt es am Sp. $+\gamma$ zwei Richtungen steilsten Gefälles, die mit der positiv reellen Achse der s -Ebene die Winkel $\omega_0^{(+)}$ und $\omega_1^{(+)}$ von Gl. (10a, b) bilden und ganz entsprechend am Sp. $-\gamma$ die

gleichartigen Richtungen mit den Richtungswinkeln $\omega_0^{(-)}$ und $\omega_1^{(-)}$ von Gl. (10 α , β). Wir verabreden dann, daß der Anfangs- und Endpunkt S_0 und S_1 des Integrals (7) für den Sp. $+\gamma$ sowie des entsprechenden Integrals für den Sp. $-\gamma$ jeweils in denjenigen Unterlandsektoren liegen, deren Winkelhalbierende im Punkt $s = \pm\gamma$ mit den Richtungen ω_0 und ω_1 übereinstimmen.

$$\omega_0^{(+)} = -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}(\nu + \tau_0) \quad \dots \quad (10a) \quad \omega_0^{(-)} = -\frac{1}{2}(\nu + \tau_0) \quad \dots \quad (10\alpha),$$

$$\omega_1^{(+)} = +\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}(\nu + \tau_0) \quad \dots \quad (10b) \quad \omega_1^{(-)} = \pi - \frac{1}{2}(\nu + \tau_0) \quad \dots \quad (10\beta).$$

Für den langsam veränderlichen Bestandteil im Integral (7) gelten für die Koeffizienten a_2 in der Entw.

$$\begin{aligned} h(s - \gamma) &= \{ \mathfrak{Cof}(s - \gamma) + \mathfrak{Tg}\gamma \cdot \mathfrak{Sin}(s - \gamma) \}^{-(1+\mu)} \} \dots \dots \dots (11) \\ &= a_0 + a_1 \cdot (s - \gamma) + a_2 \cdot (s - \gamma)^2 + \dots \end{aligned}$$

nach Potenzen von $s - \gamma$ die Formeln

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= 1 & a_1 &= -(1 + \mu) \cdot \mathfrak{Tg}\gamma & a_2 &= \frac{1}{2} \cdot (1 + \mu) \cdot [(2 + \mu) \cdot \mathfrak{Tg}^2\gamma - 1] \\ a_3 &= \frac{1}{6} (1 + \mu) \cdot \mathfrak{Tg}\gamma \cdot [3\mu + 5 - (2 + \mu)(3 + \mu) \cdot \mathfrak{Tg}^2\gamma] \\ a_4 &= \frac{1}{34} \cdot (1 + \mu) \cdot [(3\mu + 5) - 2(3\mu + 7)(\mu + 2) \cdot \mathfrak{Tg}^2\gamma + (2 + \mu)(3 + \mu)(4 + \mu) \cdot \mathfrak{Tg}^4\gamma] \end{aligned} \right\} \quad (11a).$$

Die entsprechende Entw. am Sp. $-\gamma$ unterscheidet sich hiervon nur in dem Vorzeichen von γ .

Damit sind wir nun auch bereits in der Lage, unter Zuhilfenahme des bekannten Formelmateri als der Methode der Sp., wie es z. B. die Arbeit von O. Perron [6] bereitstellt, die as. Entw. für die beiden Integrale $Y_*(\pm\gamma)$ von Gl. (7) anzuschreiben. Zu diesem Zweck empfiehlt es sich aber, vordem noch die beiden Abkürzungen (12a, b) einzuführen.

$$P_1(\gamma; \mu) \equiv Q_1(\gamma; \mu^2) = \frac{\mathfrak{Ctg}^3\gamma}{96} \cdot \{ 3(4\mu^2 - 1) \cdot \mathfrak{Tg}^4\gamma - 6 \cdot \mathfrak{Tg}^2\gamma + 5 \} \quad \dots \quad (12a),$$

$$P_2(\gamma; \mu) = \frac{\mathfrak{Ctg}^6\gamma}{18432} \cdot \left\{ 9 \cdot (4\mu^2 - 9)(4\mu^2 - 1) \cdot \mathfrak{Tg}^8\gamma - 12 \cdot (2\mu - 1)(2\mu - 3)(8\mu + 7) \cdot \mathfrak{Tg}^6\gamma \right. \\ \left. + 6 \cdot (121 - 28\mu^2) \cdot \mathfrak{Tg}^4\gamma - 924 \cdot \mathfrak{Tg}^2\gamma + 385 \right\} \quad (12b).$$

Mit ihrer Hilfe lassen sich die as. Entw. der beiden Integrale $Y_*(\pm\gamma)$ von Gl. (7) durch die beiden Gl. (13a, b) wiedergeben.

$$Y_*(+\gamma) \sim \left\{ \frac{\pi \cdot e^{+\pi i}}{\kappa \cdot \mathfrak{Sin} 2\gamma} \right\}^{1/2} \cdot \frac{e^{-\kappa \cdot (\mathfrak{Sin} 2\gamma - 2\gamma)}}{(\mathfrak{Cof}\gamma)^\mu} \cdot \left\{ 1 - \frac{P_1(\gamma; \mu)}{\kappa} + \frac{P_2(\gamma; \mu)}{\kappa} + O(\kappa^{-3}) \right\} \quad \dots \quad (13a),$$

$$Y_*(-\gamma) \sim - \left\{ \frac{\pi}{\kappa \cdot \mathfrak{Sin} 2\gamma} \right\}^{1/2} \cdot \frac{e^{+\kappa \cdot (\mathfrak{Sin} 2\gamma - 2\gamma)}}{(\mathfrak{Cof}\gamma)^\mu} \cdot \left\{ 1 + \frac{P_1(\gamma; \mu)}{\kappa} + \frac{P_2(\gamma; \mu)}{\kappa^2} + O(\kappa^{-3}) \right\} \quad (13b),$$

$$(|\arccos(\mathfrak{Cof}\gamma)| \leq \frac{\pi}{2} \text{ für } -\frac{\pi}{2} < \beta \leq +\frac{\pi}{2}, \alpha > 0 \text{ und } -\frac{\pi}{2} \leq \beta < +\frac{\pi}{2}, \alpha < 0).$$

Um nun späterhin den Zusammenhang zwischen den Sp.-Integralen (13a, b) mit den die parabolischen Funktionen definierenden Integralen von 1.1 (6) herstellen zu können, müssen wir noch kurz auf den Verlauf der Sp.-Wege auch in größerer Entfernung von den Sp. eingehen. Das geschieht am übersichtlichsten mittels der beiden Hilfsfunktionen

$$\left. \begin{aligned} \Phi(s; +\gamma) &\equiv \Re\{f(s) - f(+\gamma)\} \\ \Psi(s; +\gamma) &\equiv \Im\{f(s) - f(+\gamma)\} \end{aligned} \right\} = 2 \left\{ \begin{aligned} &\left[\cos \nu \right] \cdot (s_1 - \alpha) + 2 \cdot \left[\begin{aligned} &-\sin \nu \\ &+\cos \nu \end{aligned} \right] \cdot (s_2 - \beta) \end{aligned} \right\} \quad (14a \\ &+ \mathfrak{Sin} 2\alpha \cdot \left[\begin{aligned} &\cos \zeta \\ &\sin \zeta \end{aligned} \right] + \sin 2\beta \left[\begin{aligned} &-\sin \zeta \\ &\cos \zeta \end{aligned} \right] - \frac{\mathfrak{Cof} 2\alpha + \cos 2\beta}{\mathfrak{Cof} 2s_1 + \cos 2s_2} \cdot \left\{ \mathfrak{Sin} 2s_1 \cdot \left[\begin{aligned} &\cos \zeta \\ &\sin \zeta \end{aligned} \right] + \sin 2s_2 \cdot \left[\begin{aligned} &-\sin \zeta \\ &\cos \zeta \end{aligned} \right] \right\} \end{aligned} \right\} \quad (14b),$$

in denen $s = s_1 + i \cdot s_2$ und wie bisher $\nu = \arccos(\kappa)$, $\zeta = \arccos(z)$ und $\gamma = \alpha + i \cdot \beta$ gesetzt worden ist. Bekanntlich bestimmt sich dann der Verlauf der über die beiden Sp. hinweglaufenden Wege steilsten Gefälles oder steilsten Anstiegs in ihrer ganzen Ausdehnung aus den Gl.

$$\Psi(s; +\gamma) = 0 \quad \dots \quad (15a) \quad \Psi(s; -\gamma) = 0 \quad \dots \quad (15b)$$

Die Falllinien unter ihnen findet man dadurch heraus, daß für den Punkt $s = \sigma$ einer solchen Linie $\Phi(\sigma, \pm \gamma) < 0$ werden muß. Für den Sp. $s = +\gamma$ selbst ist die Gl. (15a) identisch erfüllt. Auch die Funktion $\Phi(+\gamma, +\gamma)$ hat daselbst den Wert Null, was in diesem Falle bedeutet, daß in jedem der beiden Hauptsp. infolge unserer Normierung der Integrale $Y_{\kappa}(\pm \gamma)$ der schnell veränderliche Bestandteil des Integranden auf der Betragsfläche 1 liegt.

Wir entnehmen den Gl. (14a, b) die folgenden allgemeinen Gesetzmäßigkeiten: 1. Spiegelt man eine zum Sp. $+\gamma$ gehörende Falllinie in ihrem ganzen Verlauf am Ursprung der s -Ebene, was auf eine Vertauschung der Vorzeichen von s_1 und s_2 hinausläuft, so geht die Kurve in die zum Sp. $-\gamma$ gehörende Steiglinie über, denn mit $\Psi(s, +\gamma)$ ist auch $\Psi(-s, -\gamma)$ gleich Null, während $\Phi(s, +\gamma)$ und $\Phi(-s, -\gamma)$ entgegengesetzte Vorzeichen haben. 2. Spiegelt man dagegen eine zum Sp. $+\gamma$ gehörende Falllinie in ihrem ganzen Verlauf an der positiv reellen Achse der s -Ebene, so geht sie in eine zum Sp. $\bar{\gamma}$ gehörende Falllinie über mit \bar{z} und $\bar{\kappa}$ an Stelle der bisherigen Werte z und κ . Damit steht die Aussage der beiden Gleichungspaare (10a, b) und (10 α , β) durchaus im Einklang. Mittels der Gl. (14b) kann man auch leicht die Bedingungen formulieren, die erfüllt sein müssen, damit etwa auf einer Falllinie, die zum Sp. $+\gamma$ gehört, auch zugleich der andere Hauptsp. $-\gamma$ oder einer der beiden Nebensp. $+\gamma \pm \pi i$ liegt.

Mit Hilfe der Gl. (14b) läßt sich auch die Frage nach dem Verhalten einer Falllinie beim Einlaufen in eine der beiden wesentlich singulären Stellen $\pm \pi i/2$ beantworten. Setzen wir nämlich in (14a, b) $s_1 = \varrho \cdot \cos \varphi$ und $s_2 = \pm \pi/2 + \varrho \cdot \sin \varphi$ mit $\varrho \approx 0$, so ergibt sich in erster Näherung:

$$\Phi\left(\pm \frac{\pi i}{2} + \varrho \cdot e^{i\varphi}; +\gamma\right) \approx \frac{1}{2} \cdot \Phi(-\gamma, +\gamma) \mp \pi \cdot \sin \nu - \frac{\cos(\varphi - \zeta)}{\varrho} \cdot (\mathfrak{Cof} 2\alpha + \cos 2\beta) \quad (14\alpha),$$

$$\Psi\left(\pm \frac{\pi i}{2} + \varrho \cdot e^{i\varphi}; +\gamma\right) \approx \frac{1}{2} \cdot \Psi(-\gamma, +\gamma) \pm \pi \cdot \cos \nu + \frac{\sin(\varphi - \zeta)}{\varrho} \cdot (\mathfrak{Cof} 2\alpha + \cos 2\beta) \quad (14\beta)$$

Das Einlaufen des Integrationsweges in die beiden wesentlich singulären Punkte $\pm \pi i/2$ muß also nach (14a) in Rücksicht auf die Konvergenz des Integrals (7) unter einem Winkel φ gegen die Horizontale erfolgen, der dem Winkelbereich $-\pi/2 + \zeta < \varphi < +\pi/2 + \zeta$ angehört. Tut er dies, so konvergiert das Integral (7) auch dann, wenn die Beifunktion $(\mathfrak{Cof} s)^{-(1+\mu)}$ mit $\Re(\mu) > -1$ dabei über alle Grenzen wächst. Nun garantiert aber die Vorschrift (15a) ganz von selbst dafür, daß das Einlaufen des Integrationsweges in die singuläre Stelle in dieser Weise erfolgt, denn nach Gl. (14 β) erfordert sie, daß dabei $\varphi = \zeta + \varrho \cdot \text{const.}$ ist, wobei sich dann die Konstante aus der Bedingung

$$\frac{1}{2} \cdot \Psi(-\gamma, +\gamma) \pm \pi \cdot \cos \nu + \text{Const.} (\mathfrak{Cof} 2\alpha + \cos 2\beta) = 0$$

bestimmt. Der Einlaufwinkel φ in eine der beiden wesentlich singulären Stellen ist also auf einer Falllinie genau gleich dem Phasenwinkel von z . Um diese besondere ausgezeichnete Einlaufrichtung in den Bildern hervorzuheben, sind darin senkrecht zu ihr durch die beiden singulären Punkte gehende, kurze Geradenstücke eingezeichnet worden, die auf der Seite des Hineinlaufens eine Schraffur tragen.

Die ins Unendliche auslaufenden Falllinien verhalten sich wie Gerade, die unter dem Winkel $-\nu$ gegen die positive Richtung der reellen s -Achse geneigt sind.

2. Die asymptotischen Entwicklungen für die parabolischen Funktionen für Werte von $z/4\kappa$ im Intervall $-\infty < z/4\kappa < +\infty$. Die bisherigen Ergebnisse setzen uns in den Stand, in dem praktisch besonders wichtigen Falle eines reellwertigen Verhältnisses von $z/4\kappa$ den noch fehlenden Zusammenhang zwischen den as. Entw. der beiden Integrale $Y_{\kappa}(\pm \gamma)$ und den einzelnen parabolischen Funktionen herzustellen. Dabei wird wohl gemerkt lediglich die Reellität des Verhältnisses von $z/4\kappa$ vorausgesetzt. Die Phasenwinkel von z und κ brauchen nur der Bedingung zu genügen, daß ihre Differenz gleich Null oder gleich $\pm \pi$ ist. Wir unterscheiden die drei Fälle $-\infty < z/4\kappa < 0$, $0 < z/4\kappa < 1$ und $1 < z/4\kappa < \infty$ und beginnen dabei mit dem letzten als dem einfachsten.

2.1. Der Fall $+1 < z/4\kappa < \infty$. Nach den Angaben im Abschn. 1.2 liegt bei Werten von $z/4\kappa$ aus diesem Bereich der Sp. $+\gamma$ auf der positiv reellen Achse der s -Ebene an der Stelle $s_1 = \alpha$ mit $0 < \alpha < \infty$. Der Verlauf der Fall- und Steiglinien, der nach Gl. 1.2 (15a) nicht bloß von $z/4\kappa$, sondern auch noch von den Phasenwinkeln ζ oder ν abhängt, ist für diesen Fall in Bild 2 dargestellt, und zwar unterschieden nach den drei Unterfällen 1a) $\zeta = \nu = 0$, 1b) $\zeta = \nu = \pi/2$ und 1c) $\zeta = \nu = \pi/4$. Die Falllinie über den Sp. $+\gamma$ ist voll ausgezogen, die über den Sp. $-\gamma$ durch eine strichpunktierte Linie angedeutet.

Aus Abb. 1c ist zu ersehen, daß die Fallinie über den Sp. $+\alpha$ vollkommen der Wegführung des Integrals in Gl. 1.1 (6b) für die Funktion $W_{\kappa, \mu/2}(z)$ entspricht. Das trifft auch noch bei der zu Fall 1a) gehörenden Fallinie zu. Im Fall 1b) macht sich jedoch die Besonderheit bemerkbar, daß die Fallinie über den Sp. $+\alpha$ in ihrem oberen Verlauf auf den Sp. $+\alpha + \pi i$ aufstößt, für

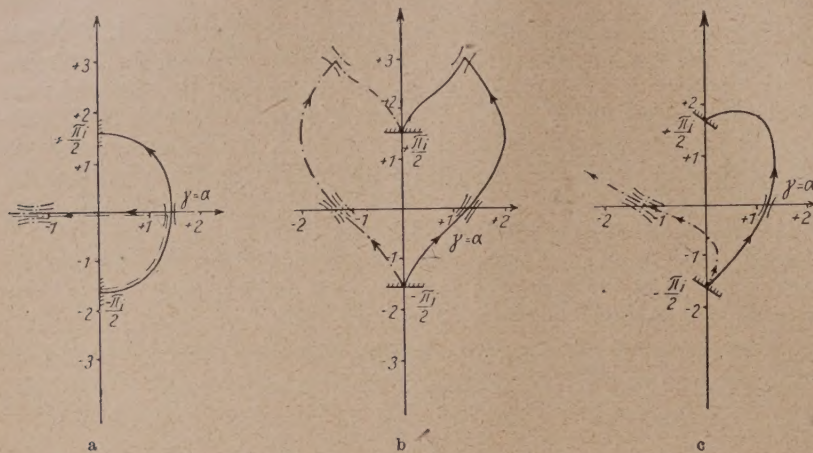


Bild 2. Der Verlauf der Fallinien durch die Sattelpunkte $s = \pm \alpha$ für ein $z/4\kappa = +4$.

Es ist in Bild	$\zeta = \nu$	$\Re\{f(\pm\alpha)\}$	$\omega_0(+\gamma)$	$\omega_1(+\gamma)$	$\omega_0(-\gamma)$	$\omega_1(-\gamma)$
2a	0	$\pm 4,29$	$-\pi/2$	$+\pi/2$	0	$+\pi$
2b	$+\pi/2$	0	$-3\pi/4$	$+\pi/4$	$-\pi/4$	$+3\pi/4$
2c	$+\pi/4$	$\pm 3,04$	$-5\pi/8$	$+3\pi/8$	$-\pi/8$	$+7\pi/8$

und außerdem in Bild 2b: $\Re\{f(-\alpha + \pi i)\} = -2\pi$.

kann sein Beitrag zum Integralwert außer Betracht bleiben. Für die Winkel $\zeta = \nu = -\pi/4$ oder $-\pi/2$ liegen die Verhältnisse mutatis mutandis auf Grund der Schlußfolgerung 2) aus Gl. (15a) ganz analog.

Es braucht mithin der Ausdruck 1.2 (13a) mit $\gamma = \alpha$ gemäß Gl. 1.1 (6b) nur noch mit dem Faktor

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1+\mu}{z} \cdot \Gamma\left(\kappa + \frac{1+\mu}{2}\right) \\ & \frac{1}{2^\mu \cdot 2\pi i} \cdot \left\{ \frac{1+\mu}{z} \cdot (2\pi)^{1/2} \cdot e^{\left(\kappa - \frac{\mu}{2}\right) \cdot \ln \kappa} \cdot \exp \left\{ -\kappa + \frac{\mu^2 - 1}{8\kappa} + \frac{\mu(\mu^2 - 1)}{48\kappa^2} + O(\kappa^{-3}) \right\} \right\} \quad (1) \end{aligned} \right\}$$

multipliziert zu werden, um die as. Entw. für $W_{\kappa, \mu/2}(z)$ zu liefern. Dabei empfiehlt es sich, den dritten Summanden im Argument der Funktion \exp als besonderen Faktor abzuspalten, ihn in eine Reihe zu entwickeln und diese mit der as. Reihe im Ausdruck für $Y_\kappa(+\gamma)$ zu vereinigen. Dann tritt an die Stelle des Koeffizienten $P_2(\gamma; \mu)$ von Gl. 1.2 (12b) der Koeffizient $Q_2(\gamma; \mu^2)$ der Gl.

$$\left. \begin{aligned} Q_2(\gamma; \mu^2) = & \frac{\text{Ctg}^5 \gamma}{18 \cdot 432} \cdot \{ 9(4\mu^2 - 9)(4\mu^2 - 1) \cdot \text{Ctg}^8 \gamma + 36(12\mu^2 - 7) \cdot \text{Ctg}^6 \gamma \\ & + 6 \cdot (121 - 28\mu^2) \cdot \text{Ctg}^4 \gamma - 924 \cdot \text{Ctg}^2 \gamma + 385 \} = P_2(\gamma; \mu) + \frac{\mu(\mu^2 - 1)}{48} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

und die endgültige as. Entw. für $W_{\kappa, \mu/2}(z)$ nimmt damit die Gestalt der Gl. (3) an. Sie ist gleichmäßig in dem ganzen Winkelbereich $|\zeta, \nu| \leq \pi/2$ gültig.

$$\left. \begin{aligned} W_{\kappa, \frac{\mu}{2}}(z) = & \\ = & W_{\kappa, \frac{\mu}{2}}(4\kappa \cdot \text{Cot}^2 \alpha) \sim (\text{Ctg} \alpha)^{-\frac{1}{2}} \cdot \exp \left\{ \kappa \cdot \left[\ln \left(\frac{\kappa}{e} \right) + 2\alpha - \text{Sin} 2\alpha \right] + \frac{\mu^2 - 1}{8\kappa} \right\} \\ & \cdot \left\{ 1 - \frac{Q_1(\alpha; \mu^2)}{\kappa} + \frac{Q_2(\alpha; \mu^2)}{\kappa^2} + O(\kappa^{-3}) \right\} \quad \left(1 < z/4\kappa = \text{Cot}^2 \alpha < \infty; \zeta = \nu; |\zeta, \nu| \leq \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3).$$

An ihr ist besonders bemerkenswert, daß auch die rechtsstehende as. Reihe, soweit es wenigstens die angeschriebenen Entwicklungsglieder zu beurteilen gestatten, wie die Funktion $W_{\kappa, \mu/2}(z)$ selbst gegen einen Vorzeichenwechsel von μ unempfindlich ist.

Die über den Sp. $s = -\gamma$ hinwegziehenden Falllinien verlaufen in den Fällen a und c von Bild 2 wie der zum Integral 1.2 (6h) gehörige Integrationsweg. Multiplizieren wir also die Gl. 1.2 (13b) mit dem Faktor

$$\left. \begin{aligned} & -\frac{z^{\frac{1+\mu}{2}}}{2^\mu} \cdot \frac{e^{+\pi i \kappa}}{\Gamma\left(\kappa + \frac{1+\mu}{2}\right)} \sim \\ & -\frac{z^{\frac{1+\mu}{2}}}{2^\mu \cdot (2\pi)^{1/2}} \cdot e^{+\pi i \kappa - \left(\kappa + \frac{\mu}{2}\right) \cdot \ln \kappa} \cdot \exp\left\{+\kappa - \frac{\mu^2 - 1}{8\kappa} + \frac{\mu(\mu^2 - 1)}{48\kappa^2} + O(\kappa^{-3})\right\} \end{aligned} \right\} \cdot \cdot (3'),$$

so stellt die entstehende Entw. mit vorläufiger Ausnahme des Wertes $\nu = +\pi/2$ as. die Funktion $W_{-\kappa, \mu/2}(z \cdot e^{-\pi i})$ dar. Dabei muß in dem obigen Faktor das Zeichen — aufgenommen werden, weil sich nach Abb. 2 im Integral 1.1 (6h) der Integrationsweg von $-\infty$ nach dem Punkt $-\pi i/2$ erstreckt, der Aufstellung der Gl. 1.2 (13b) aber die Annahme zugrunde liegt, daß der Sp. in der Richtung $\omega_0^{(-)} \rightarrow \omega_1^{(-)}$ überschritten wird. Was nun den Fall 1b) mit $\nu = +\pi/2$ anbetrifft, so führt er, wie ein Vergleich des Falllinienverlaufs mit dem Weg des Integrals in Gl. 1.1 (6d) lehrt, zwar ebenfalls auf die Funktion $W_{-\kappa, \mu/2}(z \cdot e^{-\pi i})$, jedoch ist diesmal mit dem Faktor

$$\frac{\Gamma\left(-\kappa + \frac{1-\mu}{2}\right)}{2^\mu} \cdot \frac{(z \cdot e^{+\pi i})^{\frac{1+\mu}{2}}}{2\pi i} = \frac{z^{\frac{1+\mu}{2}}}{2^\mu} \cdot \frac{e^{+\pi i \kappa}}{\Gamma\left(\kappa + \frac{1+\mu}{2}\right)} \cdot \frac{i \cdot e^{-\pi i \kappa + \frac{\pi i}{2}(1+\mu)}}{2 \cdot \cos \pi\left(\kappa + \frac{\mu}{2}\right)} \cdot \cdot (3'')$$

zu multiplizieren. Da aber wegen $\Im(\kappa) > 0$ und $|\kappa| \rightarrow \infty \cdot \cos(\pi(\kappa + \mu/2)) \sim \exp(-\pi i \kappa - \pi i \mu/2)$ ist, so sind in den drei Fällen 1a, b, c die obigen Faktoren gleich, und es gilt daher für $W_{-\kappa, \mu/2}(z \cdot e^{-\pi i})$ die as. Entw. (4a) mit dem charakteristischen Winkelbereich $0 \leq \zeta, \nu \leq +\pi/2$.

$$\left. \begin{aligned} W_{-\kappa, \mu/2}(z \cdot e^{-\pi i}) &= W_{-\kappa, \frac{\mu}{2}}(4\kappa \cdot \mathfrak{C}o^2 \alpha \cdot e^{-\pi i}) \sim (\mathfrak{I}g \alpha)^{-\frac{1}{2}} \cdot \exp\left\{-\kappa \cdot \left[\ln\left(\frac{\kappa \cdot e^{-\pi i}}{e}\right) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + 2\alpha - \mathfrak{S}in 2\alpha\right] - \frac{\mu^2 - 1}{8\kappa}\right\} \cdot \left\{1 + \frac{Q_1(\alpha; \mu^2)}{\kappa} + \frac{Q_2(\alpha; \mu^2)}{\kappa^2} + O\left(\frac{1}{\kappa^3}\right)\right\} \end{aligned} \right\} (4a). \\ (1 < z/4\kappa = \mathfrak{C}o^2 \alpha < \infty; \zeta = \nu; 0 \leq \zeta, \nu \leq +\frac{\pi}{2})$$

Um den Verlauf der Integrationswege in Bild 2 für die Winkel $\zeta, \nu = -\pi/4$ oder $-\pi/2$ überblicken zu können, braucht man sich lediglich die Wege in Bild 2 b, c für $\zeta, \nu = +\pi/4$ oder $+\pi/2$ an der reellen s_1 -Achse gespiegelt zu denken. Das Integral 1.2 (13b) stellt dann jetzt die Funktion $W_{-\kappa, \mu/2}(z \cdot e^{+\pi i})$ dar, und durch ganz gleichartige Überlegungen wie oben gelangt man dadurch für diese Funktion zu der as. Entw. (4b) mit dem charakteristischen Winkelbereich $-\pi/2 \leq \zeta, \nu \leq 0$.

$$\left. \begin{aligned} W_{-\kappa, \frac{\mu}{2}}(z \cdot e^{+\pi i}) &= W_{-\kappa, \frac{\mu}{2}}(4\kappa \cdot \mathfrak{C}o^2 \alpha \cdot e^{+\pi i}) \sim (\mathfrak{I}g \alpha)^{-\frac{1}{2}} \cdot \exp\left\{-\kappa \cdot \left[\ln\left(\frac{\kappa \cdot e^{+\pi i}}{e}\right) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + 2\alpha - \mathfrak{S}in 2\alpha\right] - \frac{\mu^2 - 1}{8\kappa}\right\} \cdot \left\{1 + \frac{Q_1(\alpha; \mu^2)}{\kappa} + \frac{Q_2(\alpha; \mu^2)}{\kappa^2} + O\left(\frac{1}{\kappa^3}\right)\right\} \end{aligned} \right\} (4b) \\ (1 < z/4\kappa = \mathfrak{C}o^2 \alpha < \infty; \zeta = \nu; -\frac{\pi}{2} \leq \zeta, \nu \leq 0)$$

Im Falle $\zeta, \nu = 0$ hat man sich in der zu diesem Fall gehörenden Abb. 2a die Falllinie über den Sp. $-\alpha$ durch die obere Hälfte der über den Sp. $+\alpha$ zum Punkt $+\pi i/2$ gehenden Falllinie ergänzt zu denken.

Bildet man mit den Gl. (3) und (4a, b) die Gl. 1.1 (8) nach, so ergibt sich für die Funktion $M_{\kappa, \mu/2}(z)$ die as. Darstellung

$$\left. \begin{aligned} \frac{M_{\kappa, \frac{\mu}{2}}(z)}{\Gamma(1+\mu)} &= \frac{M_{\kappa, \frac{\mu}{2}}(4\kappa \cdot \mathfrak{C}o^2 \alpha)}{\Gamma(1+\mu)} \sim (2\pi \cdot \mathfrak{I}g \alpha)^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{\mu}{2} \cdot \ln \kappa + \frac{\mu(\mu^2-1)}{48\kappa^2}} \\ &\cdot \left\{ 2 \cdot \sin \pi \left(\frac{1+\mu}{2} - \kappa \right) \cdot e^{+\kappa \cdot (\mathfrak{S}in 2\alpha - 2\alpha)} \cdot \left[1 + \frac{Q_1}{\kappa} + \frac{Q_2}{\kappa^2} \dots \right] \right. \\ &\left. + e^{\mp \pi i \left(\kappa - \frac{1+\mu}{2} \right) - \kappa (\mathfrak{S}in 2\alpha - 2\alpha)} \cdot \left[1 - \frac{Q_1}{\kappa} + \frac{Q_2}{\kappa^2} \dots \right] \right\} \dots (5) \\ Q_{1,2} &\equiv Q_{1,2}(\alpha; \mu^2) \\ (1 < z/4\kappa = \mathfrak{C}o^2 \alpha < \infty; \quad \zeta = \nu; \quad \text{ob. Vorz.: } 0 \leq (\zeta, \nu) \leq +\frac{\pi}{2}; \\ &\quad \text{unt. Vorz.: } -\frac{\pi}{2} \leq (\zeta, \nu) \leq 0) \end{aligned} \right\}$$

Gemäß den dazu gemachten Angaben tritt das Doppelvorzeichen in (5) nur im Falle $\zeta = \nu = 0$ auf. Jedoch ist die darin liegende Zweideutigkeit nur scheinbar und ein Beispiel für das bekannte Phänomen von G. Stokes. Da nämlich für jedes $\alpha > 0$ auch $\mathfrak{S}in 2\alpha > 2\alpha$ ist, so ist für $\kappa > 0$ der zweite Summand in der geschweiften Klammer vernachlässigbar klein gegenüber dem ersten. Solange also bei reellen Werten von κ und z das Verhältnis $z/4\kappa > 1$ ist, hat die Funktion $M_{\kappa, \mu/2}(z)$ auf Grund der Gl. (5) gewiß keine Nullstelle. Die beiden Summanden in dieser Klammer sind überhaupt nur für ein $\Re(\kappa) = 0$ von gleicher Größenordnung. Im Grenzfall $\kappa = i \cdot \tau$ mit $\tau > 0$ ergibt sich z. B. im besonderen aus (5) die as. Entw.

$$\left. \begin{aligned} \frac{M_{i\tau, \frac{\mu}{2}}(i \cdot 4\tau \mathfrak{C}o^2 \alpha)}{\Gamma(1+\mu)} &= e^{\frac{\pi i}{2}(1+\mu)} \cdot \frac{M_{-i\tau, \frac{\mu}{2}}(-i \cdot 4\tau \mathfrak{C}o^2 \alpha)}{\Gamma(1+\mu)} \\ &\sim \left(\frac{2}{\pi \cdot \mathfrak{I}g \alpha} \right)^{1/2} \cdot \tau^{-\frac{\mu}{2}} \cdot \exp \left\{ +\pi \tau + \frac{\pi i}{4}(1+\mu) - \frac{\mu(\mu^2-1)}{48\tau^2} \right\} \\ &\cdot \left\{ \cos \left[\tau (\mathfrak{S}in 2\alpha - 2\alpha) - \frac{\pi}{4} \right] \cdot \left(1 - \frac{Q_2}{\tau^2} + O(\tau^{-4}) \right) \right. \\ &\left. + \sin \left[\tau (\mathfrak{S}in 2\alpha - 2\alpha) - \frac{\pi}{4} \right] \cdot \left(\frac{Q_1}{\tau} + O(\tau^{-3}) \right) \right\} \dots (6) \\ (0 < \alpha < \infty; \quad \tau > 0; \quad Q_{1,2} &\equiv Q_{1,2}(\alpha; \mu^2)) \end{aligned} \right\}$$

Aus ihr kann geschlossen werden, daß die links stehende Funktion bei festen Werten von α unendlich viele Nullstellen in bezug auf τ hat. Sie sind identisch mit den Eigenwerten von $M_{i\tau, \mu/2}(i \cdot \text{const})$ hinsichtlich τ .

Ein anderer interessanter Grenzfall von (5) liegt vor, wenn $\kappa = n + (1+\mu)/2$ ist mit $n = 0, 1, 2, \dots$. Dann entartet nämlich die Funktion $M_{\kappa, \mu/2}(z)$ gemäß Gl. (7) in das Laguerre-Polynom

$$L_n^{(\mu)}(z) = \frac{\Gamma\left(\kappa + \frac{1+\mu}{2}\right)}{\Gamma\left(\kappa + \frac{1-\mu}{2}\right)} \cdot e^{z/2} \cdot z^{-\frac{1+\mu}{2}} \cdot \frac{M_{\kappa, \frac{\mu}{2}}(z)}{\Gamma(1+\mu)} \quad \left(\kappa = n + \frac{1+\mu}{2} \right) \dots (7)$$

Es hat in dieser Definition im Hinblick auf die Gl. 1.1 (1) als Glied mit der höchsten Potenz von z den Summanden $(-z)^n/n!$. Bei großen Werten von n und $z = x > 0$ hat aber in der Regel irgendein mittleres Glied den größten Zahlenwert. Für reelle Werte von κ und $z = x$ verschwindet auch in diesem Falle die Zweideutigkeit aus der Gl. (5), weil $\kappa - (\mu+1)/2$ jetzt eine positive ganze Zahl ist. Auf Grund von (7) ist nach Gl. (5) für große Werte von z und κ das Laguerre-Polynom as. gleich dem Ausdruck

$$\left. \begin{aligned} L_n^{(\mu)}(z) &\sim \frac{(-)^n}{(2\pi z \cdot \mathfrak{I}g \alpha)^{1/2} \cdot (2 \cdot \mathfrak{C}o^2 \alpha)^\mu} \cdot \exp \{ \kappa \cdot (1 + 2\alpha + e^{-2\alpha}) \} \cdot \left[1 - \frac{P_1(\alpha; \mu)}{\kappa} \right. \\ &\left. + \frac{P_2(\alpha; \mu)}{\kappa^2} + O(\kappa^{-3}) \right] \quad \left(\kappa = n + \frac{1+\mu}{2}; \quad \text{arc}(\kappa) = \text{arc}(z); \quad z/4\kappa = \mathfrak{C}o^2 \alpha \right) \dots (8) \end{aligned} \right\}$$

Geht hierin $z/4\kappa \rightarrow \infty$, so wird angenähert $2\alpha \sim \ln(z/\kappa)$ und also sehr groß, und man errechnet aus (8) den besonderen as. Näherungswert

$$(-)^n \cdot (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \cdot z^{-\frac{1+\mu}{2}} \cdot e^{+\kappa - \left(\kappa - \frac{\mu}{2}\right) \cdot \ln \kappa}.$$

Für sehr großes n entspricht er dem Gliede $(-z)^n/n!$

2.2. Der Fall $0 < z/4\kappa < 1$. Für diesen Wertebereich liegen die beiden Sp. $\pm \gamma$ auf der imaginären Achse der s -Ebene, und zwar für $z/4\kappa \approx 1$ in der Nähe des Nullpunktes und für ein $z/4\kappa \approx 0$ in der Nähe der beiden wesentlich singulären Stellen $\pm \pi i/2$. Der Verlauf der Falllinien ist in Bild 3 wiedergegeben, und zwar wieder unterschieden nach den drei Unterfällen $\zeta = \nu = 0$, $\zeta = \nu = +\pi/4$ und $\zeta = \nu = +\pi/2$. Der Verlauf der Falllinien für $\zeta, \nu = -\pi/4$ und $\zeta = -\pi/2$ ist dann ebenfalls klar.

Der auffälligste Unterschied in dem Verlauf der Falllinien von Abb. 3 gegenüber Abb. 2 besteht in dem Fehlen einer unmittelbar vom Punkt $-\pi i/2$ zum Punkt $+\pi i/2$ übergehenden Falllinie. Vielmehr zieht sich hier in den Fällen 3a, c die vom Punkt $-\pi i/2$ ausgehende Falllinie sofort über den Sp. $-i\beta$ in die linke s -Halbebene hinüber und läuft dort in zunehmend gerader Richtung unter dem Winkel $\varphi = -\nu + \pi$ mit $\nu = 0$ oder $\pi/4$ gegen den Punkt ∞ . In der gleichen Weise vollzieht sich der Verlauf der vom Punkt $+\pi i/2$ ausgehenden Falllinie über den Sp. $+i\beta$. Der Zusammenhang mit dem früheren Verhalten der Falllinien wird aber sofort verständlich, wenn man die Sache so ansieht, als handle es sich auch hier um einen einzigen vom Punkt $-\pi i/2$ zum Punkt $+\pi i/2$ verlaufenden Weg, der jedoch unter den besonderen hier vorliegenden Bedingungen den Übergang von dem ersten zum zweiten singulären Punkt nicht direkt vollziehen kann, sondern wegen einer dort vorgelagerten hohen Betragsfläche nach links ausweichen muß.

Die Falllinien zu Bild 3a, c können nun offenbar, solange man sie als nicht zusammenhängend ansieht, als die Integrationswege der Integrale 1.1 (6g, h) aufgefaßt werden. Das führt dann mittels der Formeln 2.1 (3') für die Funktion $W_{-\kappa, \mu/2}(z \cdot e^{\pm \pi i})$ sofort zu den beiden as. Entwicklungen

$$\left. \begin{aligned} W_{-\kappa, \frac{\mu}{2}}(z \cdot e^{+\pi i}) &\equiv W_{-\kappa, \frac{\mu}{2}}(4\kappa \cdot \cos^2 \beta \cdot e^{+\pi i}) \sim (\lg \beta)^{-\frac{1}{2}} \\ &\cdot \exp \left\{ i\kappa \cdot (2\beta - \sin 2\beta) + \frac{\pi i}{4} - \kappa \cdot \ln \left(\frac{\kappa \cdot e^{+\pi i}}{e} \right) - \frac{\mu^2 - \frac{1}{3}}{8\kappa} \right\} \\ &\cdot \left\{ 1 - \frac{Q_1(+i\beta; \mu^2)}{\kappa} + \frac{Q_2(+i\beta; \mu^2)}{\kappa^2} + O(\kappa^{-3}) \right\} \\ &\quad (\text{Sp: } +i\beta) \end{aligned} \right\} \dots (1a),$$

$$\left. \begin{aligned} W_{-\kappa, \frac{\mu}{2}}(z \cdot e^{-\pi i}) &\equiv W_{-\kappa, \frac{\mu}{2}}(4\kappa \cdot \cos^2 \beta \cdot e^{-\pi i}) \sim (\lg \beta)^{-\frac{1}{2}} \\ &\cdot \exp \left\{ -i\kappa (2\beta - \sin 2\beta) - \frac{\pi i}{4} - \kappa \cdot \ln \left(\frac{\kappa e^{-\pi i}}{e} \right) - \frac{\mu^2 - \frac{1}{3}}{8\kappa} \right\} \\ &\cdot \left\{ 1 + \frac{Q_1(+i\beta; \mu^2)}{\kappa} + \frac{Q_2(+i\beta; \mu^2)}{\kappa^2} + O(\kappa^{-3}) \right\} \\ &\quad (\text{Sp: } -i\beta) \end{aligned} \right\} \dots (1b),$$

($0 < \beta < \frac{\pi}{2}$; $\zeta = \nu$; $-\frac{\pi}{2} \leq \zeta, \nu \leq +\frac{\pi}{2}$; $\Im g(i\beta) = i \cdot \lg \beta$)

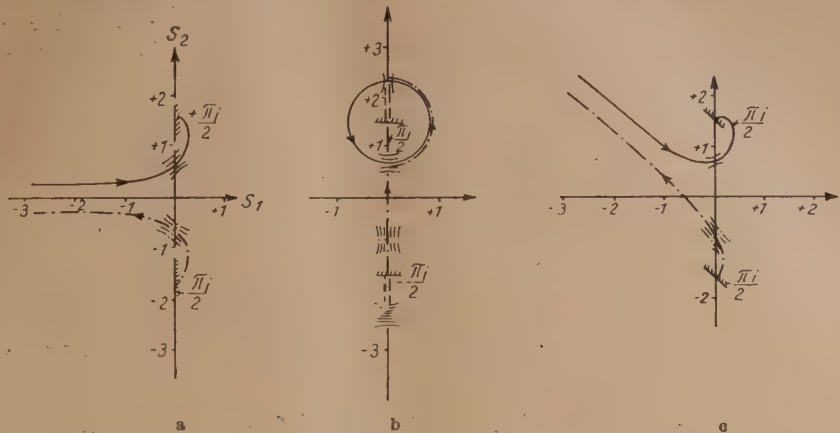


Bild 3. Der Verlauf der Falllinien durch die Sattelpunkte $s = \pm i\beta$ für ein $z/4\kappa = +0,5$.

Es ist in Bild	$\zeta = \nu$	$\Re\{f(\pm i\beta)\}$	$\omega_0(+\gamma)$	$\omega_1(+\gamma)$	$\omega_0(-\gamma)$	$\omega_1(-\gamma)$
3a	0	0	$-3\pi/4$	$+\pi/4$	$-\pi/4$	$+3\pi/4$
3b	$+\pi/2$	$\mp 0,571$	$-\pi$	0	$-\pi/2$	$+\pi/2$
3c	$+\pi/4$	$\mp 0,404$	$-3\pi/8$	$+\pi/8$	$-3\pi/8$	$+5\pi/8$

und außerdem in Bild 3b: $\Re\{f(+i\beta + \pi i)\} = +0,571 - 2\pi$
und $\Re\{f(+i\beta - \pi i)\} = -0,571 + 2\pi$

die damit bereits für den Winkelbereich $|\zeta, \nu| < \pi/2$ als gültig nachgewiesen sind. Was nun den Fall von Abb. 3b anbetrifft, so stellt hier offenbar die Falllinie über den unteren Sp. $-i\beta$, die in den oberen Sp. $+i\beta$ von unten her kommend als Steiglinie einläuft und dann auf der Falllinie dieses Passes den singulären Punkt $+\pi i/2$ in einem nach rechts offenen Halbkreis umläuft, gemäß Gl. 1.1 (6d) ebenfalls die Funktion $W_{-\kappa, \mu/2}(z \cdot e^{-\pi i})$ dar. Von den drei Pässen, über die dieser Integrationsweg nach Abb. 3b verläuft, kommt jedoch für die Auswertung nur der Beitrag des untersten in Betracht. Die zugehörige as. Entw. entspricht dann aber wieder genau der Gl. (1b). Andererseits stimmt der Weg über den oberen Sp. in Bild 3b im Hinblick auf die Gl. 1.1 (6k) mit dem der Funktion $M_{\kappa, -\mu/2}(z)$ überein. Er kann aber auch, da der Beitrag des Sp. $-i\beta + \pi i$ gegenüber dem des Sp. $+i\beta$ vernachlässigt werden kann, mit dem Weg des Integrals 1.1 (6g) in Beziehung gesetzt werden. Der Geltungsbereich von (1a) und (1b) hat sich damit im Hinblick auf die frühere Bemerkung über die Spiegelung der Wege an der reellen Achse auch auf die beiden Grenzwinkel $\zeta, \nu = \pm \pi/2$ ausdehnen lassen.

Zieht man nun noch die beiden Gl. 1.1 (7a, b) heran und berücksichtigt die as. Formel,

$$\Gamma\left(\kappa + \frac{1+\mu}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\kappa + \frac{1-\mu}{2}\right) \sim 2\pi \cdot \exp\left\{2\kappa \cdot \ln\left(\frac{\kappa}{e}\right) + \frac{\mu^2 - \frac{1}{3}}{4\kappa} + O(\kappa^{-3})\right\} \quad (2),$$

$$(|\kappa| \rightarrow \infty, |\arg(\kappa)| < \pi)$$

so ergeben sich aus (1a, b) für $W_{\kappa, \mu/2}(z)$ und $M_{\kappa, \mu/2}(z)$ sofort die beiden weiteren as. Entw.

$$W_{\kappa, \frac{\mu}{2}}(z) \equiv W_{\kappa, \frac{\mu}{2}}(4\kappa \cdot \cos^2 \beta) \sim 2 \cdot (\operatorname{tg} \beta)^{-\frac{1}{2}} \cdot \exp\left\{\kappa \cdot \ln\left(\frac{\kappa}{e}\right) + \frac{\mu^2 - \frac{1}{3}}{8\kappa} + O(\kappa^{-3})\right\} \cdot \left\{ \begin{aligned} &\sin\left[\kappa(2\beta - \sin 2\beta) + \frac{\pi}{4}\right] \cdot \left(1 + \frac{Q_2(+i\beta; \mu^2)}{\kappa^2} + O(\kappa^{-4})\right) \\ &+ \cos\left[\kappa(2\beta - \sin 2\beta) + \frac{\pi}{4}\right] \cdot \left(i \cdot \frac{Q_1(+i\beta; \mu^2)}{\kappa} + O(\kappa^{-3})\right) \end{aligned} \right\} \quad (3).$$

$$\frac{M_{\kappa, \frac{\mu}{2}}(z)}{\Gamma(1+\mu)} = \frac{M_{\kappa, \frac{\mu}{2}}(4\kappa \cdot \cos^2 \beta)}{\Gamma(1+\mu)} \sim \left(\frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{tg} \beta\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \kappa^{-\frac{\mu}{2}} \cdot \exp\left\{\frac{\mu(\mu^2 - 1)}{48\kappa^2} + O(\kappa^{-4})\right\} \cdot \left\{ \begin{aligned} &\sin\left[\kappa(\pi - 2\beta + \sin 2\beta) - \frac{\pi}{2}\left(\mu - \frac{1}{2}\right)\right] \cdot \left(1 + \frac{Q_2(+i\beta; \mu^2)}{\kappa^2} + O(\kappa^{-4})\right) \\ &- \cos\left[\kappa(\pi - 2\beta + \sin 2\beta) - \frac{\pi}{2}\left(\mu - \frac{1}{2}\right)\right] \cdot \left(i \cdot \frac{Q_1(+i\beta; \mu^2)}{\kappa} + O(\kappa^{-3})\right) \end{aligned} \right\} \quad (4).$$

$$(0 < z/4\kappa = \cos^2 \beta < 1; \quad \zeta = \nu; \quad 0 < \beta < \frac{\pi}{2}; \quad -\frac{\pi}{2} < \zeta, \nu \leq +\frac{\pi}{2})$$

Bei einer imaginären Komponente von κ darf natürlich in diesen Beziehungen der \sin und \cos gemäß der Eulerschen Formel durch eine der beiden Exponentialfunktionen ersetzt werden. Ohne die Glieder in κ^{-1} und κ^{-2} wurde die Formel (4) auf anderem Wege zum ersten Male von A. Erdelyi [4] angegeben.

Mittels der Gl. 2.1 (7) kann die obige Gl. (4) wieder dazu benutzt werden, um auch für das Laguerre-Polynom im Falle großer Werte von n und $z = x > 0$ einen as. Näherungsausdruck zu gewinnen. Es ergibt sich diesmal dafür die Gl.

$$(-)^n \cdot e^{-x/2} \cdot L_n^{(\mu)}(x) \sim (2 \cdot \cos \beta)^{-\mu} \cdot (\pi \cdot \kappa \cdot \sin 2\beta)^{-\frac{1}{2}} \cdot \exp\left\{-\frac{\mu(\mu^2 - 1)}{48\kappa^2} + O(\kappa^{-4})\right\} \cdot \left\{ \begin{aligned} &\sin\left[\kappa(2\beta - \sin 2\beta) + \frac{\pi}{4}\right] \cdot \left(1 + \frac{Q_2(+i\beta; \mu^2)}{\kappa^2} + O(\kappa^{-4})\right) \\ &+ \cos\left[\kappa(2\beta - \sin 2\beta) + \frac{\pi}{4}\right] \cdot \left(i \cdot \frac{Q_1(+i\beta; \mu^2)}{\kappa} + O(\kappa^{-3})\right) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\left(0 < \frac{x}{4\kappa} = \cos^2 \beta < 1; \quad \kappa = n + \frac{1+\mu}{2}; \quad \mu \text{ reell}; \quad \zeta = \nu = 0; \quad 0 < \beta < \frac{\pi}{2}\right)$$

Es versteht sich, daß es im Hinblick auf diesen Fall allein zweckmäßiger wäre, nicht mit dem hier benutzten Hilfswinkel β zu arbeiten, sondern etwa mit dem durch die Gleichung $\cos^2 \beta' = x/4n$ definierten Winkel β' . Man vergleiche im übrigen mit der Formel (5) eine ganz ähnliche in der Arbeit [5] von F. Tricomi.

Aus der Gl. (4) lassen sich weitere bemerkenswerte Schlußfolgerungen ziehen. Sind κ und $z = x$ rein reell und positiv und genügt das Verhältnis $x/4\kappa$ der zu Gl. (4) angegebenen Forderung, so hat die Funktion $M_{\kappa, \mu/2}(x)$ nach (4) offensichtlich unendlich viele Nullstellen in bezug auf κ . Bezeichnen wir die als groß vorausgesetzte n -te Nullstelle dieser Funktion mit $\kappa_{\mu, n}$, so läßt sich aus der Gl. (4) ohne viel Mühe die asymptotische Formel (6) herleiten.

$$\kappa_{\mu, n} \sim \frac{\pi \left(n + \frac{\mu}{2} - \frac{1}{4} \right)}{\pi - 2\beta + \sin 2\beta} \cdot \frac{\operatorname{ctg}^3 \beta \cdot 3(4\mu^2 - 1) \cdot \operatorname{tg}^4 \beta + 6 \cdot \operatorname{tg}^2 \beta + 5}{96} + O \left(\frac{1}{\pi^3 \left(n + \frac{\mu}{2} - \frac{1}{4} \right)^3} \right) \quad (6).$$

$(n \text{ groß ganzz., } \cos^2 \beta = z/4\kappa = \text{const., } 0 < \beta < \frac{\pi}{2}).$

Ist andererseits in (4) im besonderen $\kappa = -i \cdot \tau$ mit $\tau > 0$ und $z = -i \cdot \eta$ mit $\eta > 0$, so ist in allererster Näherung

$$\frac{M_{-i\tau, \frac{\mu}{2}}(-i\eta)}{\Gamma(1+\mu)} \sim - \left(\frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{tg} \beta \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot i \cdot \tau^{-\frac{\mu}{2}} \cdot e^{+\frac{\pi i \mu}{4}} \cdot \operatorname{Ein} \left[\tau (\pi - 2\beta + \sin 2\beta) - \frac{\pi}{2} \left(\mu - \frac{1}{2} \right) \right] \quad (7).$$

$(\mu \text{ reell})$

Daraus kann geschlossen werden, daß die Funktion $M_{-i\tau, \mu/2}(-i\eta)$ bei einem $\tau, \eta > 0$ für alle $\tau > \eta/4$ gewiß nullstellenfrei ist. Dahingegen besitzt bekanntlich die Funktion $M_{-i\tau, \mu/2}(-i\eta)$ mit $\tau < 0$ unendlich viele reelle Nullstellen in bezug auf τ .

2.3. Der Fall $-\infty < z/4\kappa < 0$. Ist das Verhältnis $z/4\kappa$ gleich einer beliebigen negativen Zahl, so liegen die beiden Hauptsp. $\pm \gamma$ in der s -Ebene an den Stellen $\pm (\alpha + \pi i/2)$ mit $0 < \alpha < \infty$. Die in den Gl. 1.2 (13a, b) auftretenden Hyperbelfunktionen von γ stellen sich dann als Funktionen von α gemäß Gl. (1) dar. Die Differenz der beiden Phasenwinkel ζ und ν von z ist

$$\begin{aligned} \operatorname{Sin} \gamma &= i \cdot \operatorname{Cos} \alpha \dots (1a) & \operatorname{Cos} \gamma &= i \cdot \operatorname{Sin} \alpha \dots (1b) & \operatorname{Tg} \gamma &= \operatorname{Ctg} \alpha \dots (1c) \\ \operatorname{Ctg} \gamma &= \operatorname{Tg} \alpha \dots (1d) & \operatorname{Sin} 2\gamma - 2\gamma &= -[2\alpha + \operatorname{Sin} 2\alpha + \pi i] \dots (1e) \end{aligned}$$

bei dieser Lage des Sp. $+\gamma$ im Hinblick auf die Gl. 1.2(2) durch die Gl. (2a) gegeben. Hätte man $\gamma = \alpha - \pi i/2$ gesetzt, so wäre $\zeta - \nu = -\pi$ zu setzen. Wir bleiben jedoch im folgenden bei der ersten Festsetzung.

$$\begin{aligned} \zeta - \nu &= +\pi \dots (2a) \\ \kappa &= \kappa' \cdot e^{-\pi i} \dots (2b) \\ \nu' &= \operatorname{arc}(\kappa') \dots (2c) \\ \nu &= \nu' - \pi \dots (2d) \end{aligned}$$

Die Frage nach dem Zusammenhang der beiden Sp.-Integrale 1.2 (13a, b) mit den Integraldarstellungen 1.1 (6) für die parabolischen Funktionen entscheiden wir auch im vorliegenden Falle auf anschaulichem Wege. Zu diesem Zweck sind wieder in Bild 4 für einen bestimmten, aber willkürlich gewählten Zahlenwert des Verhältnisses $z/4\kappa$ getrennt nach den drei Unterfällen eines $\zeta = 0, +\pi/4$ und $+\pi/2$ die Falllinien durch die beiden Hauptsp. aufgezeichnet worden. Aus dem Verlauf der zum Sp. $+\gamma$ gehörenden Falllinie auf den Bildern 4a, c geht dann sofort hervor, daß das Sp.-Integral 1.2 (13a) gemäß Gl. 1.1 (6e)

die Funktion $W_{\kappa, \mu/2}(z)$ mit entgegengesetztem Vorzeichen darstellt. Im Bild 4b entspricht der Verlauf der Falllinie der Wegführung des Integrals 1.1 (6b), das mit dem gleichen Vorzeichen ebenfalls der Funktion $W_{\kappa, \mu/2}(z)$ entspricht. Jedoch ist es hierin mit einem anderen Faktor versehen. Nun ist aber das Verhältnis dieser Faktoren

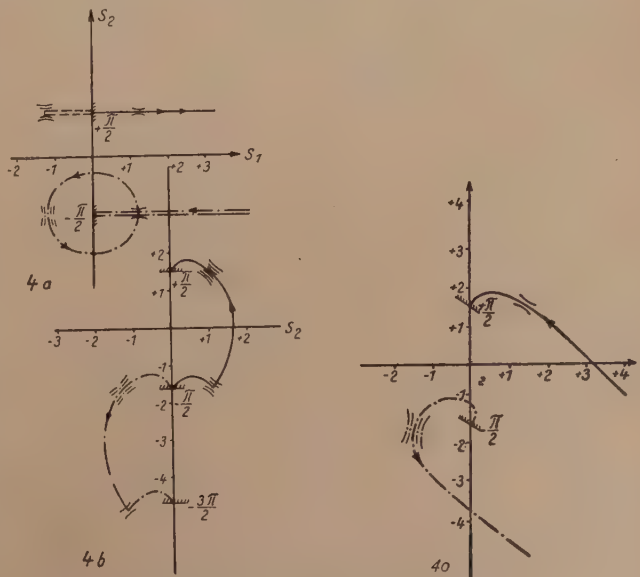


Bild 4. Der Verlauf der Falllinien durch die Sattelpunkte $s = \pm(\alpha + \pi i/2)$ für ein $z/4\kappa = -2,019$. Die Zahlenangaben für einzelne Punkte der imaginären Achse sind mit i multipliziert zu denken.

Es ist in Bild	ζ	$\Re\{f((\alpha + \pi i/2))\}$	$\omega_0(+\gamma)$	$\omega_1(+\gamma)$	$\omega_0(-\gamma)$	$\omega_1(-\gamma)$
4a	0	$\mp 7,24$	0	$+\pi$	$+\pi/2$	$+3\pi/2$
4b	$+\pi/2$	$\pm \pi$	$-\pi/4$	$+3\pi/4$	$+\pi/4$	$+5\pi/4$
4c	$+\pi/4$	$\mp 2,895$	$-\pi/8$	$+7\pi/8$	$+3\pi/8$	$+11\pi/8$

$$-\frac{e^{-\pi i \left(\kappa - \frac{1+\mu}{2} \right)} \cdot 2\pi i}{\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2} - \kappa\right) \Gamma\left(\frac{1-\mu}{2} + \kappa\right)} \sim 2 \cdot \cos \pi \left(\frac{\mu}{2} - \kappa \right) \cdot e^{-\pi i \left(\kappa - \frac{\mu}{2} \right)} = 1 + e^{-2\pi i \left(\kappa - \frac{\mu}{2} \right)}$$

und da im Falle von Bild 4b $\Im(\kappa) < 0$ und $|\kappa|$ sehr groß ist, so sind die beiden Faktoren asymptotisch einander gleich. Wir könnten demnach sofort die as. Entw. von $W_{\kappa, \mu/2}(z)$ anschreiben, und nach den eben gemachten Feststellungen hat sie im Hinblick auf die Spiegelungsregel in bezug auf ν bei einem $\xi - \nu = +\pi$ den charakteristischen Winkelbereich $-3\pi/2 < \nu \leq -\pi/2$. Für die praktischen Belange ist es aber wesentlich bequemer, den vorderen Parameter κ allemal auf den Winkelbereich $|\arg(\kappa)| \leq \pi/2$ zu beschränken und in einem Falle wie dem vorliegenden dann lieber dem vorderen Parameter ein negatives Vorzeichen zu geben, haben wir ja doch auch schon früher neben der Funktion $W_{\kappa, \mu/2}(z)$ regelmäßig die Funktion $W_{-\kappa, \mu/2}(z)$ betrachtet. Wir tun daher besser daran, in der hier anzuschreibenden as. Entw., den Parameter κ gemäß Gl. (2b) durch $\kappa' \cdot e^{-\pi i}$ zu setzen, und erhalten dann:

$$W_{-\kappa', \frac{\mu}{2}}(z) \equiv W_{-\kappa', \frac{\mu}{2}}(4\kappa' \cdot \sin^2 \alpha) \sim (\Im \alpha)^{+\frac{1}{2}} \cdot \exp \left\{ -\kappa' \cdot \ln \left(\frac{\kappa'}{e} \right) - \kappa' \cdot (2\alpha + \Im 2\alpha) - \frac{\mu^2 - 1}{8\kappa'} \right\} \cdot \left\{ 1 + \frac{Q_1\left(\alpha + \frac{\pi i}{2}; \mu^2\right)}{\kappa'} + \frac{Q_2\left(\alpha + \frac{\pi i}{2}; \mu^2\right)}{\kappa'^2} + O(\kappa'^{-3}) \right\} \quad (3).$$

$(0 < \alpha < \infty; \quad \xi = \nu'; \quad -\frac{\pi}{2} < \nu' \leq +\frac{\pi}{2})$

Etwas schwieriger gestaltet sich die Entscheidung der Frage, wie der Verlauf der über den Sp. $-\gamma = -\alpha - \kappa i/2$ hinwegziehenden Fallinie auf den Bildern 4a, b, c mit den Integrationswegen in den Gl. 1.1 (6) in Übereinstimmung gebracht werden kann. Am schnellsten dürfte hier die folgende Auslegung zum Ziele führen. Wählen wir den Gang der Fallinie in Bild 4c durch

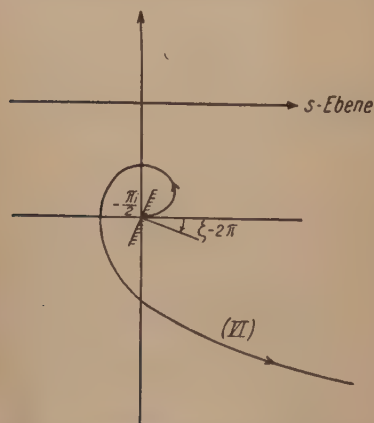


Bild 5. Bei stetiger Abnahme des Phasenwinkels von z dreht sich die schraffierte Gerade im Punkt $s = -\pi i/2$ von Bild 1 im Uhrzeigersinn. Nach Abnahme von $\arg(z)$ um den Winkel 2π verläuft dann der Weg (VI) in Bild 1 wie in diesem Bilde angegeben.

den Sp. $-\gamma$ zur Grundlage eines Vergleichs, so stellt offenbar der Verlauf der zu dem gleichen Sp. gehörenden Fallinien auf den Bildern 4a, b je einen Grenzfall zu dem Fallinienverlauf in Bild 4c dar. In Bild 4a kann man nämlich von dem Verlauf der Fallinie auch sagen, sie entferne sich, nachdem sie als Kammlinie von oben und unten her in den Sp. $+\alpha - \pi i/2$ eingelaufen ist, auf einem doppelt belegten Weg in horizontaler Richtung nach rechts ins Unendliche. In Bild 4b kann man den Verlauf so deuten, als zöge sich hier der Integrationsweg nach dem im Punkte $s = -3\pi i/2$ erfolgten Übertritt von der linken zur rechten s -Halbebene in Richtung $-i \cdot \infty$ ins Unendliche. Das könnte er z. B. in der Weise tun, daß er dabei über die unendlich vielen Nebensp. $+\alpha - p \cdot \pi i/2$ mit $p = 2, 3 \dots$ hinwegzieht, denn alle diese Sp. haben in der rechten s -Halbebene eine niedrigere Betragsfläche als der Sp. $-\alpha - \pi i/2$, so daß also die zugehörigen as. Entw. infinitär kleiner sind als die des eben erwähnten Sp. Wir beherrschen also die drei Fälle von Bild 4a, b, c gleichzeitig, sobald wir sagen können, welche parabolische Funktion durch das über den Sp. $-\alpha - \pi i/2$ hinwegziehende Integral von Bild 4c dargestellt wird.

Nun befindet sich ein Integral mit dieser Wegführung nicht unmittelbar unter den in Bild 1 wiedergegebenen Integrationswegen. Es ist aber darin enthalten, wenn wir die Möglichkeit ausnutzen, in dem Integral der Gl. 1.1 (6f) den Phasenwinkel von z aus seinem Anfangsbereich $|\xi| < \pi/2$ heraus stetig zu verringern, bis er um 2π abgenommen hat. Dabei dreht sich nämlich das schraffierte Geradenstück ebenfalls im Uhrzeigersinn um den Winkel 2π , und der zum Integral 1.1 (6f) gehörende Integrationsweg hat dann gemäß Bild 5 in der Tat ganz den nämlichen Verlauf wie in Bild 4c. Dieser neue Integrationsweg kann natürlich auch über den Sp. $-\alpha - \pi i/2$ geführt werden. Im Hinblick auf die Gl. 1.1 (6f) ergibt sich damit zunächst einmal die Darstellung

$$W_{\kappa, \frac{\mu}{2}}(z \cdot e^{-2\pi i}) = \frac{z^{\frac{1+\mu}{2}}}{2^\mu \cdot \Gamma\left(\frac{1+\mu}{2} - \kappa\right)} \cdot e^{+\pi i \left(\kappa - \frac{3}{2}(1+\mu)\right)} \cdot \int_{-\frac{\pi i}{2}}^{-\alpha - \frac{\pi i}{2}, \infty \cdot \arcc(-\nu - \pi)} e^{2\kappa s - z/2 \cdot \mathfrak{I}g s} \cdot \frac{ds}{(\mathfrak{Cof} s)^{\mu+1}} \quad (4a),$$

$$\left(-\frac{3\pi}{2} \leq \nu \leq -\frac{\pi}{2}; \quad \arcc(\mathfrak{Cof} s) = -\frac{\pi}{2} \quad \text{für} \quad s_1 > 0, \quad s_2 = -\frac{\pi}{2}\right)$$

in der der Integrationsweg dem Bild 5 entspricht. Nun darf aber nicht der Einfluß des Phasenwinkels von $\mathfrak{Cof} s$ übersehen werden. In (4a) hat $\mathfrak{Cof} s$ in der Halbebene $s_1 > 0$ in dem horizontalen Streifen zwischen den Punkten $-\pi i/2$ und $-3\pi i/2$ einen Phasenwinkel ψ aus dem Bereich $-3\pi/2 < \psi < -\pi/2$. Auf dem Teil des Integrationsweges, der der Halbebene $s_1 < 0$ angehört, hat dann $\mathfrak{Cof} s$ einen Phasenwinkel, der sich nach dem Überschreiten der imaginären s -Achse unterhalb des Punktes $-\pi i/2$ aus dem eben angegebenen durch stetige Fortsetzung ergibt. Auf dem Geradenstück $s_1 < 0, s_2 = -\pi/2$ ist gemäß dieser Vereinbarung in (4a) $\arcc(\mathfrak{Cof} s) = -3\pi/2$. In dem Sp.-Integral von Gl. 1.2 (13b) hat aber $\mathfrak{Cof} s$ im Punkte $-\alpha - \pi i/2$ den Phasenwinkel $+\pi/2$. Wünschen wir also für die Funktion auf der linken Seite von (4a) eine Integraldarstellung zu haben, in der der Phasenwinkel von $\mathfrak{Cof} s$ im Sp. $-\alpha - \pi i/2$ diesen Wert $+\pi/2$ hat, so muß in (4a) $\mathfrak{Cof} s \cdot \exp(-2\pi i)$ an Stelle von $\mathfrak{Cof} s$ treten, so daß jetzt die Gl. (4b) gilt.

$$W_{\kappa, \frac{\mu}{2}}(z \cdot e^{-2\pi i}) = \frac{z^{\frac{1+\mu}{2}}}{2^\mu \cdot \Gamma\left(\frac{1+\pi}{2} - \kappa\right)} \cdot e^{+\pi i \left(\kappa + \frac{1+\pi}{2}\right)} \cdot \int_{-\frac{\pi i}{2}}^{-\alpha - \frac{\pi i}{2}, \infty \cdot \arcc(-\nu - \pi)} e^{2\kappa s - z/2 \cdot \mathfrak{I}g s} \cdot \frac{ds}{(\mathfrak{Cof} s)^{1+\mu}} \quad (4b)$$

$$\left(-\frac{3\pi}{2} \leq \nu \leq -\frac{\pi}{2}; \quad \arcc(\mathfrak{Cof} s) = +\frac{\pi}{2} \quad \text{für} \quad s_1 < 0, \quad s_2 = -\frac{\pi}{2}\right)$$

In (4b) läßt sich nun das Integral auf der rechten Seite ohne weiteres durch den asymptotischen Näherungsausdruck der Gl. 1.2 (13b) darstellen, und zwar für alle Werte von $\arcc(z)$ aus dem Intervall $|\zeta| \leq \pi/2$. Vollzieht man gleichzeitig den Übergang von κ zu κ' gemäß Gl. (2b), so ergibt sich schließlich die Formel (5).

$$W_{-\kappa', \frac{\mu}{2}}(z \cdot e^{-2\pi i}) \equiv W_{-\kappa', \frac{\mu}{2}}(4\kappa' \cdot \mathfrak{S}in^2 \alpha \cdot e^{-2\pi i}) \sim -i \cdot (\mathfrak{I}g \alpha)^{+\frac{1}{2}} \cdot \exp\left\{-\kappa' \cdot \ln\left(\frac{\kappa'}{e}\right)\right\} \cdot \left\{1 - \frac{Q_1\left(\alpha + \frac{\pi i}{2}; \mu^2\right)}{\kappa'} + \frac{Q_2\left(\alpha + \frac{\pi i}{2}; \mu^2\right)}{\kappa'^2} + O(\kappa'^{-3})\right\} \quad (5)$$

$$\left(0 < \alpha < \infty; \quad \zeta = \nu'; \quad -\frac{\pi}{2} \leq \nu' \leq +\frac{\pi}{2}\right)$$

Setzt man die Gl. (3) und (5) nach Anweisung der Gl. 1.1 (7a) zusammen, indem man darin z mit $4\kappa' \cdot \mathfrak{S}in^2 \alpha \cdot e^{-\pi i}$ identifiziert, so entsteht die weitere as. Entw. (6) und in der gleichen Weise aus 1.1 (7b) die as. Entw. (7)

$$\frac{M_{\kappa', \frac{\mu}{2}}(4\kappa' \cdot \mathfrak{S}in^2 \alpha \cdot e^{-\pi i})}{\Gamma(1+\mu)} = e^{-\frac{\pi i}{2}(1+\mu)} \cdot \frac{M_{-\kappa', \frac{\mu}{2}}(4\kappa' \cdot \mathfrak{S}in^2 \alpha)}{\Gamma(1+\mu)} \sim \left(\frac{\mathfrak{I}g \alpha}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left\{ \kappa'^{-\frac{\mu}{2}} \cdot e^{-\frac{\pi i}{4} + \frac{\mu(\mu^2-1)}{48\kappa'^2}} \cdot \left\{ e^{+\frac{\pi i}{2}\left(\mu + \frac{1}{2}\right) - \kappa'(2\alpha + \mathfrak{S}in 2\alpha)} \cdot \left[1 + \frac{Q_1}{\kappa'} + \frac{Q_2}{\kappa'^2} \dots\right] + e^{-\frac{\pi i}{2}\left(\mu + \frac{1}{2}\right) + \kappa'(2\alpha + \mathfrak{S}in 2\alpha)} \cdot \left[1 - \frac{Q_1}{\kappa'} + \frac{Q_2}{\kappa'^2} \dots\right] \right\} \right\} \quad (6)$$

$$W_{\kappa', \frac{\mu}{2}}(4\kappa' \cdot \mathfrak{S}in^2 \alpha \cdot e^{-\pi i}) \sim (\mathfrak{I}g \alpha)^{+\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{\pi i}{4} + \kappa' \cdot \ln\left(\frac{\kappa'}{e}\right)} \cdot \left\{ e^{+\pi i \kappa' - \frac{\pi i}{4} - \kappa'(2\alpha + \mathfrak{S}in 2\alpha)} \cdot \left[1 + \frac{Q_1}{\kappa'} + \frac{Q_2}{\kappa'^2} \dots\right] + e^{-\pi i \kappa' + \frac{\pi i}{4} + \kappa'(2\alpha + \mathfrak{S}in 2\alpha)} \cdot \left[1 - \frac{Q_1}{\kappa'} + \frac{Q_2}{\kappa'^2} \dots\right] \right\} \quad (7)$$

$$\left(Q_{1,2} \equiv Q_{1,2}\left(\alpha + \frac{\pi i}{2}; \mu^2\right); \quad \zeta = \nu'; \quad 0 < \alpha < \infty; \quad -\frac{\pi}{2} \leq \nu' \leq +\frac{\pi}{2}; \quad z/4\kappa' = \mathfrak{S}in^2 \alpha\right)$$

In der zuletzt genannten überwiegt im allgemeinen der eine oder der andere Summand in der geschweiften Klammer. Sollen beide von gleicher Größenordnung sein, so muß schon gerade die Beziehung

$$\frac{\kappa'_2}{\kappa'_1} = \operatorname{tg} \nu' = -\frac{2\alpha + \operatorname{Sin} 2\alpha}{\pi} \quad (\kappa' = \kappa'_1 + i\kappa'_2)$$

gelten. In der Gl. (6) tritt der Fall gleicher Betragshöhen für beide Summanden dann ein, wenn im besonderen $\kappa' = i \cdot \tau$ mit $\tau > 0$ ist. Die Gl. (6) nimmt in diesem Fall die Gestalt von Gl. (6a) an.

$$\left. \begin{aligned} \frac{M_{-i\tau, \frac{\mu}{2}}(i \cdot 4\tau \cdot \operatorname{Sin}^2 \alpha)}{\Gamma(1+\mu)} &\sim (2/\pi \cdot \operatorname{I}g \alpha)^{\frac{1}{2}} \cdot \tau^{-\frac{\mu}{2}} \cdot e^{\frac{\pi i}{4}(1+\mu) - \frac{\mu(\mu^2-1)}{48\tau^2}} \\ &\cdot \left\{ \sin \left[\tau(2\alpha + \operatorname{Sin} 2\alpha) + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi\mu}{2} \right] \cdot \left(1 - \frac{Q_2\left(\alpha + \frac{\pi i}{2}; \mu^2\right)}{\tau^2} \dots \right) \right. \\ &\quad \left. + \cos \left[\tau(2\alpha + \operatorname{Sin} 2\alpha) + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi\mu}{2} \right] \cdot \left(\frac{Q_1\left(\alpha + \frac{\pi i}{2}; \mu^2\right)}{\tau} + \dots \right) \right\} \dots \quad (6a) \\ &\quad (0 < \alpha < \infty; \tau > 0) \end{aligned} \right\}$$

Aus ihr kann geschlossen werden, daß die Funktion $M_{-i\tau, \mu/2}(i \cdot 4\tau \cdot \operatorname{Sin}^2 \alpha)$ bei festen Werten von α unendlich viele Nullstellen in bezug auf τ hat. Das erste Glied in der Entwicklung von (6a) wurde zuerst von A. Erdelyi [4] angegeben. Bezeichnet $\tau_{\mu, n}$ eine der großen Nullstellen von (6a) in bezug auf τ , so berechnet sich dafür aus (6a) der as. Näherungsausdruck (7).

$$\tau_{\mu, n} \sim \frac{\pi \left(n + \frac{\mu}{2} - \frac{1}{4} \right)}{2\alpha + \operatorname{Sin} 2\alpha} - \frac{\operatorname{I}g^3 \alpha}{96} \cdot \frac{3(4\mu^2 - 1) \cdot \operatorname{Ctg}^4 \alpha - 6 \cdot \operatorname{Ctg}^2 \alpha + 5}{\pi \left(n + \frac{\mu}{2} - \frac{1}{4} \right)} + O \left(\frac{1}{\pi^3 \left(n + \frac{\mu}{2} - \frac{1}{4} \right)^3} \right) \quad (7)$$

3. Schlußbemerkungen. Auf den noch ausstehenden Fall eines $z/4\kappa \approx 1$, in dem der Sp. von der zweiten Ordnung ist, soll an dieser Stelle nicht eingegangen werden, obwohl er sich auf dieselbe Weise erledigen läßt und in der formalen Durchrechnung sogar der bei weitem einfachste ist. Die praktische Verwertbarkeit der as. Reihe, die sich auf diese Weise dafür aufstellen ließe, zeigt aber die gleichen Mängel wie die entsprechende Reihe bei den Zylinderfunktionen $H_{\nu}^{(1,2)}(z)$ oder $J_{\nu}(z)$ im Falle eines $\nu \approx z$. Der Anwendungsbereich ist nämlich äußerst beschränkt, denn die Abweichung des Verhältnisses $4\kappa/z$ von 1 muß stets die sehr scharfe Forderung erfüllen, daß für ein $z \rightarrow \infty$ der Quotient $(1 - 4\kappa/z) : (z/6)^{1/3} \rightarrow 0$ strebt. Zu einer wesentlich besseren Näherung führt hier jedoch der nämliche Kunstgriff, den G. N. Watson bei den Zylinderfunktionen angewendet hat. Diese Behandlungsweise verdient außerdem noch aus dem anderen Grunde den Vorzug, weil sie sich auch in dem Falle anwenden läßt, daß außer κ und z auch noch der hintere Parameter μ sehr groß ist und für alle drei Veränderliche der Ausdruck $((1 + \mu)/z)^2 + 1 - 4\kappa/z$ in der Nähe von 0 liegt. Wegen der dabei benutzten anderen Methode soll dieser Fall den Gegenstand einer besonderen Arbeit bilden.

Schrifttumsverzeichnis

- [1] H. Buchholz, Z. angew. Math. Mech. 23 (1943), 58—78 und 101—108.
- [2] Th. Sexl, Z. Physik 56 (1929), 72—93.
- [3] O. Perron, Sitz.-Ber. Bayr. Akad. München 1917, Heft 1.
- [4] A. Erdelyi, Sitz.-Ber. Akad. Wiss. Wien, math.-phys. Klasse, IIa, 146 (1937), 589—604.
- [5] F. Tricomi, Atti Acad. Sci. Torino 76 (1941), 288—316.

Eingegangen am 12. Mai 49.

Der flüssige Halbraum bei einer mechanischen Beeinflussung seiner Oberfläche. (Zweidimensionales Problem.)

Von Fritz Sauter in Göttingen

Als Vorstudie für die Behandlung des wesentlich verwickelteren Problems der mechanischen Beeinflussung eines elastischen Halbraums¹⁾ wird hier (in akustischer Näherung) die Wellenausbreitung in einem flüssigen Halbraum untersucht, auf dessen Oberfläche ein Druck wirkt, der außer von der Zeit nur von der einen (cartesischen) Koordinate in seiner Oberfläche abhängt. Dann läßt sich das Geschwindigkeitspotential in seinem räumlichen und zeitlichen Verlauf angeben als Doppelintegral über den mit einer bestimmten Einflußfunktion multiplizierten Oberflächendruck.

As preliminary work for the treatment of a problem essentially more complicated concerning the mechanical influence on the elastic semi-infinite solid¹⁾, the author analyses the propagation of waves (in acoustic approximation) in a liquid semi-infinite body. The pressure that is acting on the surface of the liquid depends (upon the time and) only upon one of the (Cartesian) coordinates in the surface. Then a velocity potential can be given as double integral of the pressure on the surface multiplied with a certain Green's function.

L'auteur traite la propagation d'ondes (approximation acoustique) dans le demi-espace fluide, dont la surface est exposée à une pression, qui dépend du temps seulement et d'une coordonnée superficielle (cartésienne). Ce travail est une étude préliminaire pour le traitement du même problème dans le cas considérablement plus compliqué du demi-espace solide élastique¹⁾. Alors le potentiel de vitesse dans son dépendance du temps et de l'espace se présente comme une intégrale superficielle sur la pression multipliée par une certaine fonction de Green.

В качестве предварительной работы для изучения значительно более сложной проблемы механического воздействия на упругое полупространство¹⁾ здесь исследуется (в „акустическом“ приближении) распространение волн в жидком полупространстве, на поверхность которого действует давление, зависящее, кроме как от времени, еще только от одной из прямоугольных координат на поверхности полупространства. Пространственная и временная зависимость потенциала скорости может быть в данном случае представлена в виде двойного интеграла от поверхностного давления, умноженного на некоторую определенную функцию влияния.

1. Problemstellung.

Der Gegenstand der folgenden Untersuchungen ist eine unendlich ausgedehnte ursprünglich ruhende Flüssigkeit mit anfänglich ebener Oberfläche, welche von einem bestimmten Zeitpunkt ab unter der Wirkung eines zusätzlichen Oberflächendrucks

$$p(x, y, z = 0, t) \equiv q(x, t) \quad \dots \dots \dots (1,1)$$

steht; dabei soll die x - y -Ebene mit der Oberfläche zusammenfallen und die z -Achse in die Flüssigkeit hineinweisen. Gefragt wird nach der Wirkung dieses Zusatzdruckes auf die Druck- und Bewegungsverhältnisse im Innern der Flüssigkeit.

Zur rechnerischen Behandlung dieses Problems sind zwei vereinfachende Annahmen erforderlich. Und zwar wird erstens von der Schwerkraft, der Oberflächenspannung der Flüssigkeit und ihrer inneren Reibung abgesehen. Zweitens soll es sich um so kleine Störungen handeln, daß man mit den hydrodynamischen Grundgleichungen in der sogenannten akustischen Näherung rechnen darf. Dann läßt sich der jeweilige Zustand der Flüssigkeit durch ein Geschwindigkeitspotential $\Phi(x, z, t)$ beschreiben, das der Wellengleichung

$$\Delta \Phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \quad \dots \dots \dots (1,2)$$

genügt, und aus dem sich die Strömungsgeschwindigkeit v und der Überdruck p nach den Beziehungen

$$v = \text{grad } \Phi, \quad p = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad \dots \dots \dots (1,3)$$

berechnen läßt. Dabei bedeutet ρ die mittlere Dichte der Flüssigkeit.

Die mathematische Aufgabe besteht nun darin, diejenige Lösung Φ der Wellengleichung zu finden, welche den durch das Problem vorgeschriebenen Randbedingungen genügt. Und zwar muß erstens der aus diesem Φ folgende Überdruck an der Flüssigkeitsoberfläche ($z = 0$) mit der vorgegebenen Funktion q übereinstimmen. Und zweitens muß die Flüssigkeit in hinreichend großer Entfernung vom Störbereich noch in Ruhe, d. h. im Normalzustand $\Phi = 0$ sein.

Daß dieses physikalisch wohl kaum realisierbare, mathematisch sicherlich bereits irgendwie gelöste Problem hier nochmals ausführlich behandelt werden soll, hat seinen Grund darin, daß hierbei eine Lösungsmethode entwickelt wird, welche auch auf andere ähnliche Probleme anwendbar ist, wie vor allem auf die physikalisch recht wichtige, rechnerisch wesentlich kompli-

¹⁾ F. Sauter, Z. angew. Math. Mech. Bd. 30 (1950), Heft 7.

zierter zu behandelnde Frage nach der Ausbreitung von Störungen in einem elastischen Halbraum infolge irgendeiner Beanspruchung seiner Oberfläche. Über dieses letztere Problem wird in einer anschließenden Untersuchung berichtet; und die folgenden Ausführungen sind nur als eine Art Vorstudie hierzu gedacht.

2. Die formale Lösung des Problems.

Die allgemeinste, nur von x , z und t abhängige Lösung Φ der Wellengleichung kann in der Form

$$\Phi(x, z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} dk f(k, \omega) e^{i \left(kx + \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2} z - \omega t \right)} \quad (2,1)$$

angeschrieben werden. Dabei ist wegen der zweiten Randbedingung das Vorzeichen der Wurzel im Exponenten so zu wählen, daß der Integrand eine in die Flüssigkeit hineinlaufende bzw. eine in dieser Richtung exponentiell abklingende Störung darstellt. Die erste Randbedingung verlangt wegen (1,1) und (1,3)

$$q(x, t) = i \rho \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} dk \omega f(k, \omega) e^{i(kx - \omega t)} \quad (2,2),$$

woraus man durch Fouriermäßige Auflösung nach $f(k, \omega)$ und Einsetzen in (2,1) die Lösung des Problems in Form eines vierfachen Integrals erhält:

$$\Phi(x, z, t) = \frac{1}{4\pi^2 i \rho} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \int_{-\infty}^{+\infty} dt' q(x', t') e^{i \left(k(x-x') + \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2} z - \omega(t-t') \right)} \quad (2,3).$$

Doch lassen sich, wie im folgenden gezeigt wird, die Integrale über ω und k allgemein auswerten, so daß man schließlich die Lösung unter Verwendung einer „Einflußfunktion“ quellenmäßig in der Form

$$\Phi(x, z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \int_{-\infty}^{+\infty} dt' q(x', t') F(x-x', z, t-t') \quad (2,4)$$

darstellen kann. Die Aufgabe reduziert sich somit auf die Berechnung der Funktion

$$F(x, z, t) = \frac{1}{4\pi^2 i \rho} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{i \left(kx + \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2} z - \omega t \right)} \quad (2,5).$$

Zunächst eine Bemerkung wegen der in diesem Integral auftretenden Singularität bei $\omega = 0$: Diese ist dadurch bedingt, daß das Geschwindigkeitspotential aus dem Druck durch eine Integration nach der Zeit hervorgeht und daher aus dem Stördruck q grundsätzlich nur bis auf eine zeitlich konstante Lösung der Wellengleichung bestimmbar ist. Nun unterscheiden sich der Cauchysche Hauptwert des ω -Integrals von den Integralwerten, die man durch Umgehen des Punktes $\omega = 0$ in der komplexen ω -Ebene erhält, nur um Ausdrücke, welche nicht von der Zeit abhängen. Da die Flüssigkeit ursprünglich ruhen soll (d. h. $\Phi = 0$), hat man unter den verschiedenen Möglichkeiten denjenigen Weg für die ω -Integration zu wählen, der kein zeitlich konstantes Glied liefert. Doch ist es nicht notwendig, sich schon jetzt auf einen solchen Integrationsweg festzulegen, vielmehr genügt es, späterhin solche zeitlich konstanten Zusatzglieder von Φ nachträglich zu streichen. Überhaupt brauchen bei der folgenden Auswertung von (2,5) nicht alle Schritte im einzelnen mit der ganzen mathematischen Strenge durchgeführt zu werden, da schließlich die so gewonnene Schlußformel doch noch besonders auf ihre Richtigkeit untersucht werden soll.

Bei der Auswertung von (2,5) ist es zweckmäßig, die durch die Abstrahlbedingung wegen des Vorzeichens von $\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2}$ erforderliche Fallunterscheidung $\omega \lesseqgtr 0$ durch eine Umformung nach dem Schema

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega G(\omega) e^{-i\omega t} = 2 \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{\infty} d\omega G(\omega) e^{-i\omega t} \right\} \quad (2,6)$$

zu umgehen. Diese Umformung ist möglich, da wegen der Realität von Φ und damit auch von F naturgemäß $G(-\omega) = G^*(\omega)$ sein muß. Dabei bedeutet das Sternchen den Übergang zum Komplexkonjugierten. Man kann sich daher im folgenden durchweg auf positive ω -Werte beschränken.

Ferner ist es angezeigt, den Wurzel Ausdruck im Exponenten von (2,5) durch die Substitution

$$k = \frac{\omega}{c} \sin \alpha, \quad \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2} = \frac{\omega}{c} \cos \alpha \quad \dots \quad (2,7)$$

zu beseitigen. Dabei bedeutet die neue Veränderliche α , sofern sie reell ist, offenbar den Neigungswinkel der ebenen Wellen, aus denen sich das Integral (2,5) zusammensetzt, gegen die Oberfläche. Setzt man außerdem noch zur Vereinfachung

$$x = R \sin \vartheta, \quad z = R \cos \vartheta \quad \dots \quad (2,8),$$

so erhält man für F statt (2,5) den Ausdruck

$$F = \frac{1}{2\pi^2 \rho c} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{i} \int_0^\infty d\omega \int_{-\frac{\pi}{2} + i\infty}^{+\frac{\pi}{2} - i\infty} d\alpha \cos \alpha e^{i\omega \left(\frac{R}{c} \cos(\alpha - \vartheta) - t \right)} \right\} \quad \dots \quad (2,9).$$

Wegen der Definition von α und der Abstrahlbedingung hat man, um zu einer für alle ϑ -Werte zwischen $-\pi/2$ und $+\pi/2$ gültigen Formel zu kommen, ursprünglich geradlinig von $-\pi/2 + i\infty$ nach $-\pi/2$, von da nach $+\pi/2$ und schließlich nach $+\pi/2 - i\infty$ zu führen (vgl. den gestrichelten Integrationsweg in Bild 1). Er kann aber, da der Integrand nur im Unendlichen singulär ist, auch irgendwie anders, also z. B. in der Art der ausgezogenen Kurve von Bild 1 geführt werden, sofern er nur bei $-\pi/2 + i\infty$ aus dem Unendlichen kommt und bei $+\pi/2 - i\infty$ wieder ins Unendliche führt.

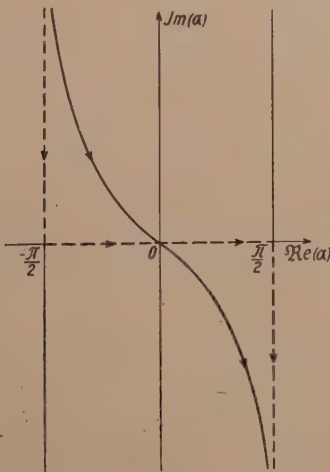


Bild 1

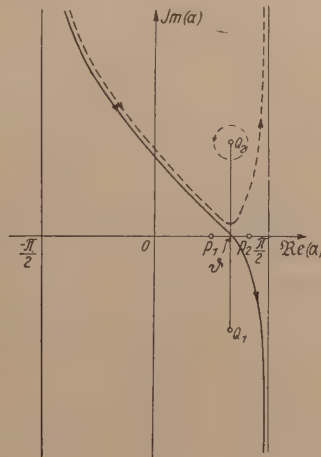


Bild 2¹⁾

Dieser Verlauf des Integrationsweges könnte nun in Hinblick auf die Analogie mit der Sommerfeldschen Integraldarstellung der Hankel-Funktionen nahe legen, erst die α -Integration auszuführen. Man kommt aber hier und im besonderen bei komplizierteren Problemen viel schneller zum Ziel, wenn man in (2,9) erst die ω -Integration ausführt. Man gelangt so unmittelbar zu der Formel

$$F = \frac{1}{2\pi^2 \rho} \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\frac{\pi}{2} + i\infty}^{+\frac{\pi}{2} - i\infty} \frac{d\alpha \cos \alpha}{R \cos(\alpha - \vartheta) - ct} \right\} \quad \dots \quad (2,10),$$

sofern man den Integrationsweg in der α -Ebene so führt, daß dauernd $\Im\{R \cos(\alpha - \vartheta) - ct\} > 0$ ist. Da letzteres nur im zweiten und vierten Quadranten eines durch den Punkt $\alpha = \vartheta$ gelegten, zu den bisherigen Achsen parallelen Koordinatensystems gilt, hat man den Integrationsweg jetzt in der in Bild 2 durch die ausgezogene Kurve dargestellten Weise zu führen¹⁾.

¹⁾ Ich verdanke diese einfache Begründung für den Übergang von (2,9) nach (2,10) Herrn Dr. G. Leibfried. Ich hatte ursprünglich das ω -Integral nur bis zu einem großen Wert Ω erstreckt und dann das die Größe Ω enthaltende Glied hinsichtlich der α -Integration mit der Sattelpunktmethode ausgewertet (Sattelpunkt bei $\alpha = \vartheta$), wobei dieses Glied im Limes $\Omega \rightarrow \infty$ wie $1/\sqrt{\Omega}$ verschwindet.

Natürlich kann man nun den Integrationsweg wieder weiter deformieren, hat aber jetzt auf die neu aufgetretenen Pole bei $\alpha = \vartheta \pm \arccos(ct/R)$ zu achten. Diese liegen für $ct < R$ symmetrisch zum Punkt $\alpha = \vartheta$ auf der reellen Achse (P_1 und P_2 in Bild 2), für $ct > R$ auf der Vertikalen durch diesen Punkt (Q_1 und Q_2 in Bild 2). Evident muß der Integrationsweg zunächst so geführt werden, daß P_1 bzw. Q_1 rechts, P_2 bzw. Q_2 links von ihm liegen.

Das Auftreten von Polen im Integranden läßt vermuten, daß sich das Integral (2,10) irgendwie auf den Umlauf um einen dieser Pole zusammenziehen und so nach der Residuummethode auswerten läßt. Doch stört hierbei zunächst die Tatsache, daß der Integrationsweg aus dem positiv-imaginär-Unendlichen kommt und ins negativ-imaginär-Unendliche läuft. Da aber ein Integral mit reellem Integranden nur ins Komplex-konjugierte übergeht, wenn man den Integrationsweg an der reellen Achse spiegelt, und da in (2,10) der Realteil zu nehmen ist, so daß eine solche Spiegelung des Integrationsweges oder eines Teils desselben den Wert von F nicht ändert, kann man den in Bild 2 ausgezogenen, bisherigen Integrationsweg durch den gestrichelten ersetzen, welcher sich von dem bisherigen nur durch das Hinaufklappen seines unterhalb der reellen gelegenen Stückes unterscheidet.

Jetzt kann man den neuen Integrationsweg nach oben ins Unendliche ziehen und erhält von dort wegen $\lim_{\alpha \rightarrow \beta + i\infty} \cos \alpha / (R \cos(\alpha - \vartheta) - ct) = e^{-i\vartheta}/R$ einen zeitlich konstanten Beitrag zum Integral, der einem stationären Strömungsfeld entspricht und daher gemäß den früheren Bemerkungen weggelassen werden muß. Einen endlichen Beitrag erhält man daher nur, sofern einer der neuen Pole oberhalb des gestrichelten Integrationsweges der Abb. 2 liegt. Dies ist nur der Fall, wenn $ct > R$ ist, in welchem Fall man aus (2,10) durch Residuenbildung an der Stelle Q_2 zum Wert

$$F(x, z, t) = -\frac{zct}{\pi \varrho R^2} \frac{1}{\sqrt{c^2 t^2 - R^2}} \quad \text{für } ct > R \quad (2,11)$$

kommt. Für $ct < R$ verschwindet $F(x, z, t)$ identisch. Setzt man dies Resultat in die Formel (2,4) ein, so erhält man wegen (2,8) als Lösung des Problems

$$\Phi(x, z, t) = -\frac{z}{\pi \varrho} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx'}{(x-x')^2 + z^2} \int_{-\infty}^{t - \frac{1}{c} \sqrt{(x-x')^2 + z^2}} \frac{dt' \cdot c(t-t')}{\sqrt{c^2(t-t')^2 - (x-x')^2 - z^2}} \cdot q(x', t') \quad (2,12).$$

3. Überprüfung der Lösung und Diskussion.

Die eben gefundene Lösung des Problems läßt klar erkennen, daß sich die Wirkung einer Störung von der Oberfläche in das Wasser hinein mit Schallgeschwindigkeit ausbreitet. Im besonderen ist eine zur Zeit 0 punktförmig im Nullpunkt einsetzende Störung zur Zeit $t > 0$ gerade bis zur Zylinderfläche $x^2 + z^2 = c^2 t^2$ gekommen (Stoßwellenkopf). Mit dieser Feststellung ist die Randbedingung im Unendlichen als erfüllt erwiesen. Daß die Lösung auch die Randbedingung an der Oberfläche befriedigt und außerdem der Wellengleichung genügt, also tatsächlich die richtige Lösung darstellt, kann man etwa folgendermaßen einsehen:

Setzt man die obige Lösung in die Wellengleichung ein, so wirken sich die in ihr enthaltenen Singularitäten beim zweimaligen Differenzieren recht störend aus. Setzt man aber

$$x' = x - z \sinh u, \quad t' = t - \frac{z}{c} \cosh u \cosh v \quad (3,1),$$

so wird der Integrand im Endlichen durchwegs regulär:

$$\Phi = -\frac{z}{\pi \varrho} \int_{-\infty}^{+\infty} du \int_0^{\infty} dv \cosh v \cdot q\left(x - z \sinh u, t - \frac{z}{c} \cosh u \cosh v\right) \quad (3,2).$$

Setzt man diesen Ausdruck in die Wellengleichung ein, so kommt man nach kurzer Umformung zu einem Doppelintegral, dessen Integrand sich als vollständiges Differential schreiben läßt; das Integral verschwindet daher, sofern $q(x, t)$ für $u \rightarrow \pm \infty$, $v \rightarrow +\infty$, d. h. für $x \rightarrow \pm \infty$, $t \rightarrow -\infty$ hinreichend stark gegen Null geht, was hiermit nochmals ausdrücklich vorausgesetzt werden möge.

Auch zur Überprüfung der Randbedingung an der Oberfläche muß man den Integranden in der Lösung transformieren. Setzt man hier

$$x' = x - zr, \quad t' = t - s/c \quad (3,3),$$

so geht die Lösung über in

$$\Phi(x, z, t) = -\frac{1}{\pi \rho c} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dr}{1+r^2} \int_{z\sqrt{1+r^2}}^{\infty} \frac{s ds}{\sqrt{s^2 - z^2(1+r^2)}} q(x - zr, t - s/c) \quad (3,4).$$

Hier läßt sich der Grenzübergang $z \rightarrow 0$ ohne weiteres ausführen, und es gilt die einfache Beziehung

$$\Phi(x, 0, t) = -\frac{1}{\rho c} \int_0^{\infty} ds q(x, t - s/c) \quad (3,5).$$

Daraus findet man für den Zusatzdruck an der Oberfläche

$$p = -\rho \frac{\partial \Phi(x, 0, t)}{\partial t} = \frac{1}{c} \int_0^{\infty} ds \frac{\partial q(x, t - s/c)}{\partial t} = - \int_0^{\infty} ds \frac{\partial q(x, t - s/c)}{\partial s} = q(x, t) \quad (3,6),$$

also tatsächlich den geforderten Wert.

Aus der Formel (3, 5) kann man übrigens sofort die x -Komponente der Geschwindigkeit eines Punktes an der Oberfläche ermitteln:

$$v_x(x, 0, t) = \frac{\partial \Phi(x, 0, t)}{\partial x} = -\frac{1}{\rho c} \int_0^{\infty} ds \frac{\partial q(x, t - s/c)}{\partial x} \quad (3,7).$$

Viel diffiziler ist die Berechnung der z -Komponente, für die man nach einer längeren, hier nicht wiederzugebenden Rechnung den Ausdruck

$$v_z(x, 0, t) = \frac{q(x, t)}{\rho c} + \frac{1}{\pi \rho c} \int_0^{\infty} ds \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\varphi \frac{\cos^2 \varphi}{\sin \varphi} \frac{\partial}{\partial x} q(x - s \sin \varphi, t - s/c) \quad (3,8)$$

findet.

Um schließlich noch einen Überblick über die Verhältnisse im Innern der Flüssigkeit zu erhalten, dürfte es genügen, die Lösung für den Fall zu untersuchen, daß die Druckeinwirkung auf die Oberfläche nur in einem ganz schmalen Bereich erfolgt und in zeitlicher Hinsicht als Rechteckstoß verläuft:

$$q(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ Q \delta(x) & \text{für } t > 0 \end{cases} \quad (3,9),$$

bei zeitlich konstantem Q . Dann erhält man für das Geschwindigkeitspotential aus (2,12) im Fall $ct > \sqrt{x^2 + z^2}$ den Ausdruck

$$\Phi(x, z, t) = -\frac{Q}{\pi \rho c} \frac{z}{x^2 + z^2} \sqrt{c^2 t^2 - x^2 - z^2} \quad (3,10),$$

während es für $ct < \sqrt{x^2 + z^2}$ verschwindet. Hieraus findet man für die Geschwindigkeitskomponenten im Bereich hinter der Stoßwellenfront

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \frac{Q}{\pi \rho c} \left\{ \frac{xz}{x^2 + z^2} \frac{1}{\sqrt{c^2 t^2 - x^2 - z^2}} + \frac{2xz}{(x^2 + z^2)^2} \sqrt{c^2 t^2 - x^2 - z^2} \right\} \\ v_z &= \frac{Q}{\pi \rho c} \left\{ \frac{z^2}{x^2 + z^2} \frac{1}{\sqrt{c^2 t^2 - x^2 - z^2}} + \frac{z^2 - x^2}{(x^2 + z^2)^2} \sqrt{c^2 t^2 - x^2 - z^2} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (3,11),$$

während sich für den Druck die Beziehung

$$p = \frac{Q}{\pi} \frac{z}{x^2 + z^2} \frac{ct}{\sqrt{c^2 t^2 - x^2 - z^2}} \quad (3,12)$$

ergibt. Unmittelbar hinter der Stoßwellenfront werden Druck und Geschwindigkeit unendlich groß und fallen dann gegen das Störzentrum hin ab. Dabei überlagert sich über einen vorwiegend in der Nähe der Stoßwellenfront wirksamen, radial gerichteten Strömungsanteil ein in der Nahzone um die Störungsstelle wichtig werdender zweiter Strömungsanteil, der von einer dipolartigen Kombination einer Quelle und einer Senke herzurühren scheint und die durch den Zusatzdruck q bewirkte Ausweichströmung darstellt. An der Grenzfläche selbst verschwindet in diesem Fall v_x ; die Flüssigkeit bewegt sich hier also senkrecht zur Oberfläche.

Eingegangen am 3. Juli 1949.

Morphologisch homogene Funktionen und ihre Erzeugung durch statistische Superposition von Elementfunktionen. I

I. Teil: Allgemeine Theorie

Von Hanswalter Giesekeus in Göttingen

Die Menge der morphologisch homogenen Funktionen (mhF) und die sie charakterisierenden Transformationen „Spektrum“ und „Produktdurchschnitt“ werden allgemein definiert. Dann wird aus dieser Menge diejenige Teilmenge behandelt, die man durch statistische Superposition quadratisch integrierbarer Elementfunktionen erzeugen kann, und zwar in der Weise, daß zuerst eine ganz spezielle Klasse sehr einfacher Funktionen betrachtet und diese dann sukzessive verallgemeinert wird: Spektrum und Produktdurchschnitt werden als Funktionen der entsprechenden Transformationen der Elementfunktionen dargestellt.

The class of morphologically homogenous functions (mhF) and the transformations „spectrum“ and „product-average“ characterising the mhF are introduced. The special class of mhF which can be generated by statistical superposition of element-functions, quadratically integrable, is discussed, first by considering very simple functions, and then by successive generalisation: Spectrum and product-average are represented as functions of the corresponding transformations of the element-functions.

On donne la définition de la classe des fonctions de morphologie homogène (mhF) et des transformations „spectre“ et „produit moyen“, caractérisant les mhF. Alors la classe spéciale des mhF, qui sont construites par superposition statistique de fonctions d'élément, est traitée de manière qu'on commence à considérer des fonctions, très simples, qui ensuite sont généralisées successivement. Spectre et produit moyen se présentent comme fonctions des transformations correspondantes des fonctions d'élément.

Дается общее определение множества морфологически однородных функций (mhF) и преобразований „спектр“ и „среднее произведение“, характеризующих эти функции. Затем из этого множества берется такое специальное множество, которое может быть получено статистическим наложением квадратически интегрируемых функций-элементов, причем сначала рассматриваются совсем простые функции, которые потом последовательно обобщаются: „спектр“ и „среднее произведение“ представляются как функции соответственных преобразований функций-элементов.

I. Einleitung

In der Physik, insbesondere in der Astrophysik, Geophysik und Meteorologie begegnen uns häufig Funktionen — ihre Abszisse ist fast immer die Zeit — die durch Überlagerung einer Menge von Elementfunktionen mit mehr oder weniger variabler Gestalt gebildet werden, derart, daß diese Elementfunktionen auf der Abszisse irgendwie statistisch verteilt sind. Liegen solche Funktionen als Zeitreihen vor, so nennt man diese wohl „statistische Reihen mit Erhaltungstendenz“ (unter Umständen noch dazu „mit Wiederholungstendenz“). Als einige der bekanntesten Beispiele seien genannt — aus der Elektrodynamik: die Stromstärke in einer Elektronenröhre¹⁾; aus der Optik: jeder Lichtstrahl (atomistisch betrachtet)²⁾; aus der Astrophysik: die integralen Maße der Flecken-, Fackel- und Koronaintensität, sowie die Intensitäten der Ultraviolettstrahlung, der Korpuskularstrahlung und der erst vor kurzem entdeckten elektromagnetischen Ultrakurzwellenstrahlung der Sonne; aus der Geophysik: die Schwankung des erdmagnetischen Feldes und die Nordlichthäufigkeit; aus der Meteorologie: die zeitlichen Variationen des Luftdrucks, der Temperatur, usw. Solche Funktionen — wir nennen sie mathematisch „morphologisch homogene Funktionen“ (mhF) — sollen hier ganz allgemein behandelt werden, und unsere Aufgabe wird darin bestehen, eine Methode zu finden, welche die Einflüsse der Statistik eliminiert und uns dadurch Aussagen über die mittlere Gestalt der sie erzeugenden Elementfunktionen zu machen gestattet.

Die folgende Theorie ist zwar ganz allgemein mathematisch durchgeführt, jedoch steht hinter den einzelnen Schritten immer die Anschauung der wirklich vorkommenden Funktionen und des Mechanismus ihrer Entstehung. Insbesondere ist dabei an die solaren Funktionen gedacht, wie die Theorie in erster Linie auf eine Anwendung in der Physik der solar-terrestrischen Beziehungen zugeschnitten ist, ohne jedoch hierauf irgendwie beschränkt zu sein.

II. Die Definition der morphologisch homogenen Funktion. Spektrum und Produktdurchschnitt

§ 1. Die mhF und ihr Spektrum

Es werde eine in jedem endlichen Intervall definierte und darin quadratisch integrierbare Funktion $F(t)$ betrachtet. Wir ersetzen sie durch

$$F_{12}(t) = \begin{cases} F(t) & \text{im Intervall } (T_1, T_2) \\ 0 & \text{außerhalb} \end{cases} \dots \dots \dots (1),$$

¹⁾ Das bedingt den sog. Schroteffekt.

²⁾ Das ist ja die Ursache der fundamentalen Eigenschaft des Lichts, daß nur solche Strahlen, die von ein und derselben Lichtquelle ausgehen, interferieren, und auch dann nur, wenn die Differenz der Lichtwege nicht wesentlich größer als die Kohärenzlänge ist.

und können diese Funktion dann durch ein Fourier-Integral darstellen:

$$F_{12}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}_{12}(\omega) \frac{e^{i\omega t}}{\sqrt{2\pi}} d\omega \quad \dots \quad (2)$$

mit

$$\tilde{F}_{12}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F_{12}(t) \frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{2\pi}} dt = \int_{T_1}^{T_2} F(t) \frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{2\pi}} dt \quad \dots \quad (3).$$

Dabei gilt die Vollständigkeitsrelation:

$$\int_{T_1}^{T_2} F^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{F}_{12}(\omega)|^2 d\omega \quad \dots \quad (4).$$

Ist $F(t)$ nicht nur in jedem endlichen Intervall, sondern auch in der Grenze $T_1 \rightarrow -\infty$, $T_2 \rightarrow \infty$ quadratisch integrierbar, so ist der Grenzübergang ohne weiteres auszuführen und $\tilde{F}_{12}(\omega)$ selbst strebt gegen

$$\tilde{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) \frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{2\pi}} dt \quad \dots \quad (3a),$$

wie die Theorie des Fourier-Integrals zeigt.

Wir fragen nun, ob ein Grenzübergang auch dann möglich sein kann, wenn $\int_{-\infty}^{\infty} F^2(t) dt$ nicht existiert, beschränken uns dabei aber auf den Fall, daß

$$\overline{F^2} = \lim_{\substack{T_1 \rightarrow -\infty \\ T_2 \rightarrow \infty}} \frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} F^2(t) dt \quad \dots \quad (5)$$

einen endlichen Wert hat. Dann muß nach Gl. (4) auch

$$\lim_{\substack{T_1 \rightarrow -\infty \\ T_2 \rightarrow \infty}} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\tilde{F}_{12}(\omega)}{\sqrt{T_2 - T_1}} \right|^2 d\omega = \lim_{\substack{T_1 \rightarrow -\infty \\ T_2 \rightarrow \infty}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{K}_{12}(\omega) d\omega = \overline{F^2} \quad \dots \quad (6)$$

existieren, woraus aber nicht folgt, daß dies auch für

$$\tilde{K}(\omega) = \lim_{\substack{T_1 \rightarrow -\infty \\ T_2 \rightarrow \infty}} \tilde{K}_{12}(\omega) = \lim_{\substack{T_1 \rightarrow -\infty \\ T_2 \rightarrow \infty}} \frac{|\tilde{F}_{12}(\omega)|^2}{T_2 - T_1} \quad \dots \quad (7)$$

selbst der Fall ist, und erst recht nicht für

$$\lim_{\substack{T_1 \rightarrow -\infty \\ T_2 \rightarrow \infty}} \frac{\tilde{F}_{12}(\omega)}{\sqrt{T_2 - T_1}}.$$

Wie wir später noch zeigen werden, existiert der letzte Ausdruck in der Grenze nur in ganz besonderen Fällen, nämlich dann, wenn $F(t)$ periodisch oder fastperiodisch ist, d. h. aus einer Summe periodischer Funktionen mit nichtrationalem Periodenverhältnis besteht³⁾. Solche Funktionen, für welche $\tilde{K}(\omega)$ existiert und eine integrierbare Funktion darstellt, müssen offenbar die notwendige und hinreichende Bedingung erfüllen, daß sie im Sinne der Statistik homogen sind, d. h. daß bei Unterteilung der Abszisse in genügend große Teilintervalle $(T_{\nu-1}, T_{\nu})$ die $\tilde{K}_{\nu-1, \nu}(\omega)$ um eine mittlere Funktion herum schwanken, wobei die Größe dieser Schwankung beliebig klein gemacht werden kann, wenn man nur die Intervalle genügend groß wählt⁴⁾. Wir nennen diese Funktionen deshalb allgemein „morphologisch homogene Funktionen“ und $\tilde{K}(\omega)$ ihr „Spektrum“⁵⁾.

³⁾ Wir werden im folgenden die fastperiodischen Funktionen oft zu den periodischen Funktionen hinzurechnen.

⁴⁾ Als einfaches Beispiel, für welches $\lim_{\substack{T_1 \rightarrow -\infty \\ T_2 \rightarrow \infty}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{K}_{12}(\omega) d\omega$ existiert, nicht aber $\tilde{K}(\omega) = \lim_{\substack{T_1 \rightarrow -\infty \\ T_2 \rightarrow \infty}} \tilde{K}_{12}(\omega)$, sei die Funktion $F(t) = \sin(t^2)$ genannt. Dagegen existiert $\tilde{K}(\omega)$ wohl für solche Funktionen, die wie $\sin t \cdot \cos 1/t$ oder $\cos t \cdot \sin 1/t$ in ihrer Homogenität nur derart gestört sind, daß der Einfluß dieser singulären Störung in der Grenze verschwindet. Wir werden von solcher Art von Störungen in der Folge absehen, da diese auf unsere Überlegungen keinen Einfluß haben.

⁵⁾ Wir sagen „Spektrum“ (in der Sprache der Optik: Intensitätsspektrum), weil wir den Ausdruck „Periodogramm“ (= Amplitudenspektrum) für $\tilde{F}(\omega)$ und entsprechende Größen verwenden wollen.

Unsere Definition muß aber noch in einer Hinsicht präzisiert werden. Sie ist nämlich nur dann vernünftig, wenn wir den Begriff der integrierbaren Funktionen so weit fassen, daß er die uneigentliche Diracsche δ -Funktion

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega \quad \dots \quad (8)$$

und Summen dieser Funktionen mit einschließt. $\tilde{K}(\omega)$ wird nämlich stets solche δ -Funktionen enthalten, wenn in $F(t)$ periodische Bestandteile vorkommen, im einfachsten Fall schon, wenn $\bar{F} \neq 0$ ist. Es wird im folgenden jedoch oft zweckmäßiger sein, diese δ -Funktionsanteile aus $\tilde{K}(\omega)$ herauszunehmen und in einer Folge $\tilde{K}^{(P)}(\omega_n)$ zusammenzufassen, derart, daß wir an Stelle von Gl. (4) ausführlicher schreiben können:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{K}^{(Q)}(\omega) d\omega + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{K}^{(P)}(\omega_n) = \bar{F}^2 \quad \dots \quad (9).$$

Wir haben also $\tilde{K}(\omega)$ in ein kontinuierliches Spektrum $\tilde{K}^{(Q)}(\omega)$ und ein diskretes Spektrum $\tilde{K}^{(P)}(\omega_n)$ zerlegt. $\tilde{K}^{(Q)}(\omega)$ ist dann nicht nur integrierbar, sondern sogar eine quadratisch integrierbare Funktion. Für eine gewöhnliche periodische Funktion der Periodenlänge Θ

$$P(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{P}\left(\frac{2\pi}{\Theta}n\right) e^{2\pi i n \frac{t}{\Theta}} \quad \dots \quad (10)$$

mit

$$\tilde{P}\left(\frac{2\pi}{\Theta}n\right) = \frac{1}{\Theta} \int_{-\Theta/2}^{\Theta/2} P(t) e^{-2\pi i n \frac{t}{\Theta}} dt \quad \dots \quad (11)$$

sind die

$$\tilde{K}^{(P)}\left(\frac{2\pi}{\Theta}n\right) = \left|\tilde{P}\left(\frac{2\pi}{\Theta}n\right)\right|^2 \quad \dots \quad (12),$$

also das Absolutquadrat der normalen Fourier-Koeffizienten. Im Falle der fastperiodischen Funktion

$$\Psi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{\Psi}(\omega_n) e^{i\omega_n t}, \quad \text{wo} \quad \omega_{-n} = -\omega_n \quad \dots \quad (10a)$$

und

$$\tilde{\Psi}(\omega_n) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \Psi(t) e^{-i\omega_n t} dt \quad \dots \quad (11a),$$

gilt entsprechend:

$$\tilde{K}^{(P)}(\omega_n) = |\tilde{\Psi}(\omega_n)|^2 \quad \dots \quad (12a).$$

Das Spektrum der gewöhnlichen periodischen Funktionen ist in diesem letzten Fall natürlich als Sonderfall eingeschlossen, nämlich als Spektrum mit äquidistanten Linien.

Derartige periodische Bestandteile werden wir also in den mhf im allgemeinen immer finden. Natürlich gehört auch die Klasse der rein periodischen Funktionen, d. h. der Funktionen, die nur ein Linienspektrum besitzen, für die also $\tilde{K}^{(Q)}(\omega) \equiv 0$ ist, hinzu. Doch wollen wir diese besonders einfache Unterklasse im folgenden nicht näher betrachten.

§ 2. Der Produktdurchschnitt der mhf

Wenn $\tilde{K}^{(Q)}(\omega)$ als kontinuierliches Spektrum quadratisch integrierbar und $\tilde{K}^{(P)}(\omega_n)$ ein Linienspektrum ist, so wird man ja durch Umkehr der Fourier-Transformation dazu eine Funktion $K(\tau)$ finden können, welche ebenso einen quadratisch integrierbaren Anteil $K^{(Q)}(\tau)$ und einen periodischen Anteil $K^{(P)}(\tau)$ besitzt. Wir können sie leicht angeben. Aus Gl. (3) folgt:

$$\tilde{K}_{12}(\omega) = \left| \frac{\tilde{F}_{12}(\omega)}{\sqrt{T_2 - T_1}} \right|^2 = \frac{1}{T_2 - T_1} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_{12}(t) F_{12}(t') \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{2\pi} dt dt'.$$

Substitution von t' durch $\tau = t - t'$ ergibt:

$$\tilde{K}_{12}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{T_2 - T_1} \int_{-\infty}^{\infty} F_{12}(t) F_{12}(t - \tau) dt \right\} \frac{e^{-i\omega\tau}}{\sqrt{2\pi}} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} K_{12}(\tau) \frac{e^{-i\omega\tau}}{\sqrt{2\pi}} d\tau \quad (13)$$

mit

$$K_{12}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{T_2 - T_1} \int_{-\infty}^{\infty} F_{12}(t) F_{12}(t - \tau) dt \quad (14).$$

Wir können nun diese Transformation umkehren:

$$K_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{K}_{12}(\omega) \frac{e^{i\omega\tau}}{\sqrt{2\pi}} d\omega$$

und, da der Grenzwert unter dem Integral (im oben erläuterten Sinne) existiert, hierin zur Grenze übergehen:

$$K(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{K}(\omega) \frac{e^{i\omega\tau}}{\sqrt{2\pi}} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{K}^{(Q)}(\omega) \frac{e^{i\omega\tau}}{\sqrt{2\pi}} d\omega + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{K}^{(P)}(\omega_n) e^{i\omega_n\tau} \quad (15).$$

Nach Gl. (14) ist damit

$$K(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{T_2 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_2 - T_1} \int_{-\infty}^{\infty} F_{12}(t) F_{12}(t - \tau) dt \quad (16)$$

oder auch

$$K(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \overline{F(t) F(t - \tau)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{T_2 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1 + \tau/2}^{T_2 + \tau/2} F(t) F(t - \tau) dt \quad (16a).$$

Wir nennen diese Integraltransformation den „Produktdurchschnitt“ von $F(t)$. Sein quadratisch integrierbarer Anteil $K^{(Q)}(\tau)$ ist durch den ersten Summanden, sein periodischer Anteil $K^{(P)}(\tau)$ durch den zweiten Summanden von Gl. (15) gegeben. Einige wichtige Eigenschaften des Produktdurchschnitts seien kurz zusammengestellt:

1. $K(\tau) = K(-\tau)$, d. h. $K(\tau)$ ist (wie in der Anmerkung zu Gl. (16a) schon bemerkt wurde) eine symmetrische Funktion.

2. $K(\tau)$ hat für $\tau = 0$ ein absolutes Maximum, welches an keiner anderen Stelle wieder angenommen wird. (Eine Ausnahme bilden natürlich die rein periodischen, nicht aber die fast-periodischen Funktionen.) Dies bestätigt man unmittelbar, wenn man $\tau = 0$ in Gl. (15) einsetzt, da ja $\tilde{K}(\omega)$ seinem Wesen nach stets positiv ist. Anschaulich folgt das auch sofort aus der Tatsache, daß

$$K(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \overline{F^2} \quad (17)$$

gilt.

$$3. \quad \overline{K(\tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} K(\vartheta) d\vartheta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \overline{F^2} \quad (18),$$

wie man durch Integration von Gl. (14) und Grenzübergang sofort erhält.

Wie die vorangehenden Betrachtungen zeigen, sind Produktdurchschnitt und Spektrum durch Fourier-Transformation umkehrbar eindeutig zugeordnete Größen, welche die mhf gleicher Weise repräsentieren. Es muß jedoch darauf hingewiesen werden, daß diese Funktion selbst in ihrer ganzen Erstreckung nicht durch irgendeine Summen- oder Integralförmel nach Art der Fourier-Entwicklung dargestellt werden kann, da ja, wie schon bemerkt, der Ausdruck

$\frac{\tilde{F}_{12}(\omega)}{\sqrt{T_2 - T_1}}$ in der Grenze nicht existiert. Das hat, wie später noch deutlicher werden wird, seine Ursache darin, daß diese Funktionen im allgemeinen einen statistischen Charakter tragen. Unsere $K(\tau)$ bzw. $\tilde{K}(\omega)$ können dann ihrem Wesen nach als Grenzwerte von Erwartungswerten aufgefaßt werden. Für die Phasenfunktion gibt es aber prinzipiell keinen Erwartungswert. Alle möglichen Werte sind gleich wahrscheinlich, was mit der Gleichwertigkeit aller Abszissenpunkte zusammenhängt⁷⁾.

⁶⁾ Dieser Ausdruck ist nur im Limes mit dem vorhergehenden identisch, nicht aber für endliches T_1 und T_2 . Der Summand $\tau/2$ in den Integrationsgrenzen ist nur dann von Bedeutung, wenn der Grenzübergang nicht wirklich vollzogen wird. Er bewirkt in diesem Falle, daß $K(\tau)$ auch für endliches Integrationsintervall stets symmetrisch bleibt.

⁷⁾ Diese Bemerkung gilt natürlich nicht für die periodischen Bestandteile von $F(t)$, da diese ja keinen statistischen Charakter tragen. Ihnen kommt stets eine wohldefinierte Phase zu.

§ 3. Spektrum und Produktintegral quadratisch integrierbarer Funktionen

Zum Schluß dieses Kapitels seien noch einige Transformationsgrößen quadratisch integrierbarer Funktionen eingeführt, welche in den folgenden Überlegungen eine wichtige Rolle spielen werden.

Wenn $f(t)$ eine im Intervall $(-\infty, \infty)$ definierte und dort quadratisch integrierbare Funktion⁸⁾ bedeutet, so sei

$$\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{2\pi}} dt \quad \dots \quad (19)$$

ihr Periodogramm und

$$\tilde{k}(\omega) = |\tilde{f}(\omega)|^2 \quad \dots \quad (20)$$

ihr Spektrum. Analog zum Produktdurchschnitt existiert hier das „Produktintegral“

$$k(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{k}(\omega) \frac{e^{i\omega\tau}}{\sqrt{2\pi}} d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f(t-\tau) dt \quad \dots \quad (21).$$

Diese Größe hat die dem Produktdurchschnitt ganz entsprechenden Eigenschaften:

1. $k(\tau) = k(-\tau),$
2. $k(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \text{Max}\{k(\tau)\} \quad \dots \quad (22),$
3. $\int_{-\infty}^{\infty} k(\vartheta) d\vartheta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \right\}^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} s^2 \quad \dots \quad (23).$

Die Beweise gehen ganz genau so wie bei den analogen Sätzen für den Produktdurchschnitt der mhF.

III. Morphologisch homogene Funktionen als statistische Überlagerung quadratisch integrierbarer Elementfunktionen

§ 1. Die Zerlegung der mhF in quadratisch integrierbare Elementfunktionen

Aus der Forderung, daß die mhF in jedem endlichen Intervall quadratisch integrierbar sein muß, folgt sofort, daß man sie in quadratisch integrierbare Funktionen zerlegen kann. Wenn wir die rein periodische Funktion ausnehmen, gibt es indessen unter allen möglichen Zerlegungen keine einzige, welche die Funktion in regelmäßiger Anordnung in gleichgestaltige⁹⁾ Elementfunktionen aufteilt. Nun ist zwar eine solche Zerlegung stets auf unendlich viele Arten möglich, dennoch gibt uns dieser Gedanke einen Gesichtspunkt, wie wir eine große Unterklasse der mhF in ihrer Struktur beschreiben können, indem wir nämlich für diese die Existenz einer besonders einfachen „natürlichen“ Zerlegung annehmen. Wir wollen nun allerdings nicht von einer solchen mhF ausgehen und diese Zerlegung aufsuchen (das wird im allgemeinen nicht durchführbar sein), sondern wir wollen den umgekehrten Weg einschlagen: Wir geben die Elementfunktionen vor und erzeugen daraus durch statistische Superposition eine mhF. Wie schon bemerkt, erfassen wir mit dieser Darstellung nicht alle möglichen mhF, z. B. nicht solche, die sich durch stückweises Aneinandersetzen quadratisch integrierbarer Funktionen in natürlicher Weise aufbauen lassen¹⁰⁾. Allerdings dürften diese Funktionen in der Anwendung von wesentlich geringerer Bedeutung sein als die von uns untersuchte Klasse.

§ 2. Aus lauter gleichgestaltigen Elementfunktionen aufgebaute mhF

Wir beginnen mit der Untersuchung der wohl einfachsten überhaupt möglichen mhF

$$F(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} f(t-t_j) \quad \dots \quad (24),$$

worin $f(t)$ eine quadratisch integrierbare Funktion bedeutet und die t_j mit konstanter Dichte sta-

⁸⁾ Wir bezeichnen quadratisch integrierbare Funktionen im folgenden stets mit kleinen, mhF dagegen mit großen Buchstaben, ebenso die zugehörigen Transformationsgrößen, auch wenn diese einen andern Charakter tragen als die von ihnen repräsentierten Funktionen.

⁹⁾ d. h.: gleich bis auf eine Verschiebung in der Abszissenachse.

¹⁰⁾ Eine einfache Funktion dieser Art wird in § 4 kurz behandelt, die periodische Funktion mit statistisch verteilten Phasensprüngen.

tistisch auf der Abszisse verteilt sind. Für die Rechnung werde diese Funktion durch die im Intervall $(-T/2, T/2)$ damit wesentlich gleiche Funktion

$$F'(t) = \sum_{j=1}^N f(t-t_j) \dots \dots \dots (24a)$$

angenähert, wobei

$$W(t_j) = \begin{cases} 1/T & \text{im Intervall } (-T/2, T/2) \\ 0 & \text{außerhalb} \end{cases} \dots \dots \dots (25)$$

die Wahrscheinlichkeit für die t_j bedeutet.

Wir bilden nun den Produktdurchschnitt¹¹⁾:

$$K'(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j,k=1}^N f(t-t_j) f(t-t_k-\tau) dt = \frac{1}{T} \sum_{j,k=1}^N k(\tau-t_j+t_k) \dots \dots (26),$$

wo $k(\tau)$ das Produktintegral von $f(t)$ bedeutet. Damit nimmt der Erwartungswert von $K'(\tau)$ die Form an:

$$\left. \begin{aligned} E\{K'(\tau)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} W(t_1) \dots W(t_N) K'(\tau) dt_1 \dots dt_N \\ &= \frac{N}{T} k(\tau) + \frac{1}{T^2} \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^N \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} k(\tau-t_j+t_k) dt_j dt_k \end{aligned} \right\} \dots \dots (27).$$

Wir wollen das Integralglied umformen und führen deshalb eine neue Variable $\vartheta = \tau - t_j + t_k$ ein:

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} k(\tau-t_j+t_k) dt_j dt_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{\tau-t_j-T/2}^{\tau-t_j+T/2} k(\vartheta) d\vartheta dt_j.$$

So wie dieser Ausdruck dasteht, können wir ihn nicht weiter vereinfachen, wohl aber können wir seinen Wert im Grenzfall $T \rightarrow \infty$ sofort angeben. Denn dann wird

$$\int_{\tau-t_j-T/2}^{\tau-t_j+T/2} k(\vartheta) d\vartheta \simeq \int_{-\infty}^{\infty} k(\vartheta) d\vartheta = \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \right)^2 = s^2,$$

also von t_j unabhängig, und somit nimmt das ganze Integral diesen Wert an. Wir erhalten asymptotisch, denn die Doppelsumme gibt den Faktor $N(N-1)$:

$$E\{K'(\tau)\} \simeq \frac{N}{T} k(\tau) + \frac{N(N-1)}{T^2} \int_{-\infty}^{\infty} k(\vartheta) d\vartheta.$$

Führen wir hierin die „Konzentration“ (d. h. die mittlere Anzahl der in die Intervalleinheit fallenden Elementfunktionen)

$$c = \frac{N}{T} \dots \dots \dots (28)$$

ein und lassen dann N und T beide so gegen unendlich streben, daß dieser Quotient erhalten bleibt, dann geht der Erwartungswert von $K'(\tau)$ in $K(\tau)$ selbst über und wir erhalten dafür:

$$K(\tau) = c \cdot k(\tau) + c^2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} k(\vartheta) d\vartheta = c \cdot k(\tau) + \left(c \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \right)^2 \dots \dots \dots (29).$$

Der zweite Summand stellt aber gerade das Quadrat des Mittelwerts von $F(t)$ dar, so daß wir das Ergebnis auch schreiben können:

$$K(\tau) = c \cdot k(\tau) + \bar{F}^2 \dots \dots \dots (29a).$$

¹¹⁾ Im folgenden wird der Normierungsfaktor $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ im Produktdurchschnitt und Produktintegral stets weggelassen, doch hat das auf die gewonnenen Formeln keinen Einfluß.

Wir erkennen hier sofort die beiden Anteile:

$$K^{(Q)}(\tau) = c \cdot k(\tau) \quad \dots \quad (30)$$

$$K^{(P)}(\tau) = \bar{F}^2 = c^2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} k(\vartheta) d\vartheta \quad \dots \quad (30a).$$

Hieraus können c und $k(\tau)$ dann auch einzeln bestimmt werden:

$$c = \frac{\bar{F}^2}{\int_{-\infty}^{\infty} K^{(Q)}(\vartheta) d\vartheta} \quad \dots \quad (31)$$

$$k(\tau) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} K^{(Q)}(\vartheta) d\vartheta}{\bar{F}^2} K^{(Q)}(\tau) \quad \dots \quad (31a).$$

Für $\tilde{K}(\omega)$ können wir auf Grund der Transformationsgleichungen die entsprechenden Formeln sofort angeben. Wenn $\tilde{k}(\omega)$ das Spektrum von $f(t)$ bedeutet, so ist

$$\tilde{K}^{(Q)}(\omega) = c \cdot \tilde{k}(\omega) \quad \dots \quad (32)$$

$$\tilde{K}^{(P)}(0) = \bar{F}^2 = c^2 \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \right)^2 = 2\pi c^2 \cdot \tilde{k}(0) \quad \dots \quad (32a),$$

und also umgekehrt:

$$c = \frac{\bar{F}^2}{2\pi \tilde{K}^{(Q)}(0)} \quad \dots \quad (33)$$

$$\tilde{k}(\omega) = \frac{2\pi \tilde{K}^{(Q)}(0)}{\bar{F}^2} \tilde{K}^{(Q)}(\omega) \quad \dots \quad (33a).$$

Doch wollen wir uns damit nicht zufrieden geben, sondern die direkte Ableitung dieser Gleichungen kurz skizzieren:

Die Ausgangsgl. (24a) wird mit $\frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{2\pi T}}$ multipliziert und integriert:

$$\tilde{F}'(\omega) = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{-\infty}^{\infty} F'(t) \frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{2\pi}} dt = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^N f(t-t_j) \frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{2\pi}} dt.$$

Das wird mittels der Substitution $\vartheta = t - t_j$ umgeformt zu

$$\tilde{F}'(\omega) = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{j=1}^N e^{-i\omega t_j} \int_{-\infty}^{\infty} f(\vartheta) \frac{e^{-i\omega \vartheta}}{\sqrt{2\pi}} d\vartheta = \frac{1}{\sqrt{T}} \tilde{f}(\omega) \sum_{j=1}^N e^{-i\omega t_j}.$$

-Damit ergibt sich für das Spektrum sofort:

$$\tilde{K}'(\omega) = |\tilde{F}'(\omega)|^2 = \frac{1}{T} \left| \sum_{j=1}^N e^{-i\omega t_j} \right|^2 \cdot |\tilde{f}(\omega)|^2 = \frac{|S|^2}{T} \cdot \tilde{k}(\omega) \quad \dots \quad (34).$$

Gefragt ist nun nach dem Erwartungswert von $|S|^2 = \left| \sum_{j=1}^N e^{-i\omega t_j} \right|^2$. Das ist aber eine überaus anschauliche Größe. Die Summe stellt nämlich eine Folge von N Vektoren der Länge eins dar, die wegen der Voraussetzung, daß die t_j statistisch verteilt sind, ganz unregelmäßig nach allen Richtungen weisen. Der Erwartungswert für das Abstandsquadrat zwischen Anfangs- und Endpunkt dieses N -seitigen offenen Polygonzuges ist aber bekanntlich $E\{|S|^2\} = N$. Damit haben wir schon die oben gegebene Formel gewonnen, da der Grenzübergang sofort zu vollziehen ist. Allerdings haben wir nur $\tilde{K}^{(Q)}(\omega)$ erhalten, erkennen aber sofort, warum wir $K^{(P)}(0)$ nicht mit erfaßt haben, denn die obige Überlegung galt natürlich nur für endliches ω . Für $\omega = 0$ aber haben die Vektoren alle gleiche Richtung und folglich ist $S(0) = N$. Der Grenzübergang oben ist dann nicht ausführbar, vielmehr muß man setzen:

$$\tilde{F}^{(P)}(0) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} F'(t) dt = \sqrt{2\pi} \frac{N}{T} \tilde{f}(0) = \sqrt{2\pi} c \tilde{f}(0) \quad \dots \quad (35),$$

woraus durch Quadrieren sofort $\tilde{K}^{(P)}(0)$ folgt.

Wir haben beide Rechnungen nebeneinandergestellt, um das entscheidende Moment klarer hervortreten zu lassen. Es besteht darin, daß in $\tilde{K}^{(Q)}(\tau)$ bzw. $K^{(Q)}(\omega)$, die doch in ihrem Wesen quadratische Größen sind, c linear und nicht quadratisch auftritt. Dies ist ganz allgemein das Zeichen der statistischen Verteilung. Sie bewirkt in der ersten Rechnung, daß aus den N^2 Gliedern der Doppelsumme in Gl. (26) nur die N Glieder mit $t_j = t_k$ einen Beitrag zu $K^{(Q)}(\tau)$ liefern und entsprechend in der zweiten Rechnung, daß die geometrische Summe der N Vektoren doch nur die Größenordnung \sqrt{N} ergibt. Die zweite Rechnung zeigt uns noch ein weiteres: Sie rechtfertigt nämlich unsere Annahme, daß im Grenzfall $N \rightarrow \infty$ $E\{K'(\tau)\}$ in $K(\tau)$ übergeht, d. h. daß die Streuung dann verschwindet. Denn diese ist wesentlich gegeben durch die bekannte Beziehung

$$\text{Str}\left\{\left|\sum_{j=1}^N e^{-i\omega t_j}\right|^2\right\} = N \dots \dots \dots (36).$$

Die relative Streuung wird damit:

$$\Delta^2 = \frac{\text{Str}\{|\Sigma|^2\}}{[E\{|\Sigma|^2\}]^2} = \frac{1}{N}.$$

Diese Formel erlaubt auch, in praktischen Rechnungen, wo die Funktion ja stets nur in einem endlichen Intervall bekannt ist, die Unsicherheit Δ des dabei gewonnenen Ergebnisses abzuschätzen. Sie beträgt für den Einzelwert:

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{N}} = \frac{1}{\sqrt{cT}} \dots \dots \dots (37),$$

wo T das zur Analyse benutzte Intervall kennzeichnet¹²⁾. Durch geschickte Mittelung über den Gesamtverlauf von $K(\tau)$ bzw. $\tilde{K}(\omega)$ wird die Genauigkeit jedoch meist noch vergrößert werden können.

§ 3. Aus verschiedengestaltigen Elementfunktionen aufgebaute mhF

Nachdem wir im vorigen § den einfachsten Typ der mhF eingehend behandelt haben, ist es nun verhältnismäßig leicht, von da aus zu komplizierteren Funktionen fortzuschreiten. Wir betrachten eine endliche Folge mhF $F_j(t)$ mit den zugeordneten Konzentrationen c_j , welche alle vom oben behandelten Typ sind, jedoch so, daß die Elementfunktionen der zu verschiedenem j gehörigen Funktionen verschiedengestaltig sind. Daraus bilden wir nun durch Summation eine neue mhF

$$F(t) = \sum_{j=1}^N F_j(t) \dots \dots \dots (38),$$

die also insofern von einem allgemeineren Typ ist, als sie N verschiedene Arten von Elementfunktionen enthält. Um den Produktdurchschnitt zu berechnen, zerlegen wir die einzelnen Summanden in folgender Weise:

$$F_j(t) = \Delta F_j(t) + \bar{F}_j.$$

Damit wird

$$\begin{aligned} K(\tau) &= \sum_{j,k=1}^N \left\{ \bar{F}_j \bar{F}_k + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \Delta F_j(t) \Delta F_k(t - \tau) dt \right\} \\ &= \left(\sum_{j=1}^N \bar{F}_j \right)^2 + \sum_{j=1}^N K_j^{(A)}(\tau) + \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^N \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} \Delta F_j(t) \Delta F_k(t - \tau) dt. \end{aligned}$$

Das letzte Glied verschwindet aber in der Grenze, da es eine Summe von Produktdurchschnitten statistisch unabhängiger Funktionen vom Mittelwert Null darstellt. Es folgt das Ergebnis, ($K_j^{(A)}(\tau)$ ist Produktdurchschnitt von ΔF_j , also $K_j^{(Q)}(\tau)$ von F_j):

$$K(\tau) = \sum_{j=1}^N K_j^{(Q)}(\tau) + \bar{F}^2 = \sum_{j=1}^N c_j k_j(\tau) + \bar{F}^2 \dots \dots \dots (39).$$

Mit

$$C = \sum_{j=1}^N c_j \quad \text{und} \quad \overline{k(\tau)} = \frac{\sum_{j=1}^N c_j k_j(\tau)}{\sum_{j=1}^N c_j} \dots \dots \dots (40)$$

schreibt sich das in enger Analogie zu Gl. (29a):

¹²⁾ In den später zu behandelnden Fällen ist hier c durch C^* zu ersetzen [Definition s. Gl. (42)].

$$K(\tau) = C \cdot \overline{k(\tau)} + \overline{F}^2 \dots \dots \dots (39a).$$

Aus der Kenntnis von $K^{(Q)}(\tau)$ und $K^{(P)}(\tau) = \overline{F}^2$ können wir hier allerdings C und damit $\overline{k(\tau)}$ nicht mehr exakt bestimmen. Mit der Abkürzung s_j [s. Gl. (23)] folgt wegen

$$\overline{F} = \sum_{j=1}^N c_j s_j$$

die Beziehung

$$C = (1 + \sigma) \frac{\overline{F}^2}{\int_{-\infty}^{\infty} K^{(Q)}(\vartheta) d\vartheta} \dots \dots \dots (41),$$

wo σ die relative Streuung der s_j bedeutet:

$$\sigma = \left(\frac{s_j - \overline{s_j}}{\overline{s_j}} \right)^2.$$

Da dies stets eine positive Zahl ist, gilt die Abschätzung:

$$C \geq \frac{\overline{F}^2}{\int_{-\infty}^{\infty} K^{(Q)}(\vartheta) d\vartheta} = C^* \dots \dots \dots (42).$$

C^* heiße die „effektive Konzentration“.

Denken wir uns in Gl. (39) die Zahl der Summenglieder zunehmend und die c_j entsprechend kleiner werdend, dann kommen wir, wenn wir die $f_j(t)$ durch eine in willkürlicher Weise von n Parametern x_p abhängige Funktion ersetzen, zu dem n -fachen Integralausdruck:

$$K(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} c(x_1 \dots x_n) k(x_1 \dots x_n, \tau) dx_1 \dots dx_n + \overline{F}^2 \dots \dots \dots (43).$$

Diesen können wir genau so in der abgekürzten Form der Gl. (39a) schreiben, nur daß hier die Größen C und $\overline{k(\tau)}$ formal anders definiert sind:

$$C = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} c(x_1 \dots x_n) dx_1 \dots dx_n \dots \dots \dots (44).$$

$$\overline{k(\tau)} = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} c(x_1 \dots x_n) k(x_1 \dots x_n, \tau) dx_1 \dots dx_n \dots \dots \dots (44a).$$

Die Schreibweise (39a) behält auch dann ihren Sinn, wenn wir statt endlich vieler Parameter, die wir anschaulich als n -dimensionalen Vektor auffassen können, deren unendlich viele betrachten (d. h. zu Vektoren des Hilbert-Raumes übergehen). Die Menge der Vektoren des Hilbert-Raumes ist aber der Menge der quadratisch integrierbaren Funktionen isomorph, so daß wir diese damit vollständig erfaßt haben.

Als ein Beispiel, an dem der Mechanismus der Mittelung besonders deutlich wird, sei dasjenige betrachtet, wo die Elementfunktionen nur von den beiden Parametern „Amplitude“ ξ und „Lebensdauer“ η abhängen:

$$f(\xi, \eta, t) = \xi f\left(\frac{t}{\eta}\right) \dots \dots \dots (45),$$

$$k(\xi, \eta, t) = \xi^2 \eta k\left(\frac{\tau}{\eta}\right) \dots \dots \dots (45a).$$

Damit erhält Gl. (43) die Form:

$$K(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 \eta c(\xi, \eta) k\left(\frac{\tau}{\eta}\right) d\xi d\eta + \overline{F}^2 \dots \dots \dots (46).$$

Für kleine τ werden also hier besonders die Elementfunktionen mit großer Amplitude eine Rolle spielen, während ja ins Integral über $K^{(Q)}(\tau)$ deren Flächeninhalte $s(\xi, \eta)$ quadratisch eingehen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} K^{(Q)}(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c(\xi, \eta) s^2(\xi, \eta) d\xi d\eta \dots \dots \dots (47).$$

Die Ableitung der den Gln. (39a) und (42) entsprechenden Formeln für das Spektrum ist evident, und es sollen deshalb nur die Ergebnisse angeschrieben werden:

$$\tilde{K}^{(Q)}(\omega) = C \overline{\tilde{k}(\omega)}; \quad \tilde{K}^{(P)}(0) = \overline{F^2} \dots \dots \dots (48; 48a).$$

$$C^* = \frac{\overline{F^2}}{2\pi \tilde{K}^{(Q)}(0)} \dots \dots \dots (49).$$

§ 4. Elementfunktionen mit eingepprägten Perioden

Wir kommen zu einem weiteren Typ mhF, wenn wir Elementfunktionen betrachten, denen eine periodische Funktion mit der Periodenlänge Θ aufgeprägt ist, deren Phasen φ unabhängig von den t_j der Elementfunktionen statistisch verteilt sind:

$$h(t) = P(t - \varphi) f(t) \dots \dots \dots (50).$$

Ihr Produktintegral hat dann im Einzelfall die Form:

$$k_h(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f(t - \tau) P(t - \varphi) P(t - \varphi - \tau) dt.$$

Wenn wir dies über alle Phasen mitteln, wobei wir die Substitution $\psi = t - \varphi$ einführen, erhalten wir:

$$\overline{k_h(\tau)} = \frac{1}{\Theta} \int_{-\Theta/2}^{\Theta/2} P(\psi) P(\psi - \tau) d\psi \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f(t - \tau) dt = K_P(\tau) \cdot k_f(\tau) \dots \dots (51).$$

Der Produktdurchschnitt setzt sich also in derselben Weise wie die Elementfunktionen multiplikativ aus den beiden Bestandteilen zusammen, nur, daß die Phase der periodischen Funktion selbstverständlich nicht mehr auftritt.

Wir wollen die analoge Beziehung für das Spektrum aus der obigen kurz herleiten:

$$\begin{aligned} \overline{\tilde{k}_h(\omega)} &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{k_h(\tau)} \frac{e^{-i\omega\tau}}{\sqrt{2\pi}} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} K_P(\tau) k_f(\tau) \frac{e^{-i\omega\tau}}{\sqrt{2\pi}} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{K}_P\left(\frac{2\pi}{\Theta} n\right) e^{2\pi i n \frac{\tau}{\Theta}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{k}_f(\omega') \frac{e^{i\omega'\tau}}{\sqrt{2\pi}} d\omega' \right\} \frac{e^{-i\omega\tau}}{\sqrt{2\pi}} d\tau \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{K}_P\left(\frac{2\pi}{\Theta} n\right) \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{k}_f(\omega') \delta\left(\frac{2\pi}{\Theta} n + \omega' - \omega\right) d\omega' \\ \overline{\tilde{k}_h(\omega)} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{K}_P\left(\frac{2\pi}{\Theta} n\right) \tilde{k}_f\left(\omega - \frac{2\pi}{\Theta} n\right) \dots \dots \dots (52). \end{aligned}$$

Wenn die Halbwertsbreite von $\tilde{k}_f(\omega)$ klein gegen $\frac{2\pi}{\Theta}$ ist, so ist das ein „virtuelles“ Linienspektrum, d. h. wir haben keine exakt scharfen Linien, wohl aber an den entsprechenden Stellen eine sehr starke, in einem schmalen ω -Intervall konzentrierte Kontinuumsintensität, während sie überall sonst nahezu verschwindet¹³⁾. Die Ausdehnung obiger Überlegung auf verschieden-gestaltige Elementfunktionen ist trivial und führt nur zur Ersetzung obiger Größen durch entsprechende Mittelwerte.

Es gibt noch einen ganz anderen Typ von mhF, der auch ein virtuelles Linienspektrum hat, nämlich eine periodische Funktion mit unregelmäßigen Phasenstörungen, (d. h. die Stellen oder die Größen der Phasensprünge — oder alle beide — müssen statistisch verteilt sein). Eine sehr große Mannigfaltigkeit ist hier denkbar: Man kann sich die Phasenänderung unstetig oder auch kontinuierlich vorstellen, die Häufigkeit der Sprungstellen kann eine Funktion ihrer Größe sein, usw. Wir wollen indessen hier diese Funktionen nicht weiter betrachten. Sie werden in der Theorie der Stoßdämpfung in der Optik eingehend behandelt.

Noch einige Bemerkungen zu mhF mit echten Spektrallinien: Die einfachste Form ist die, daß zu einer mhF der bisher behandelten Art additiv eine periodische Funktion hinzugefügt wird. Dann überlagern sich die Spektren beider Funktionen auch additiv. Ähnlich liegt der Fall, wenn ein periodischer und ein morphologisch homogener Bestandteil sich multiplikativ

¹³⁾ Für fastperiodische Funktionen erhalten wir genau das gleiche Ergebnis, nur daß, wie immer, ω_n an die Stelle von $\frac{2\pi}{\Theta} n$ tritt.

zusammensetzen. Allerdings hängen dann beide Spektren komplizierter zusammen. In der Praxis wird es bei solchen Funktionstypen stets vorteilhaft sein, die periodischen Anteile¹⁴⁾ erst abzutrennen und dann hinterher das Spektrum bzw. den Produktdurchschnitt zu bilden.

Eine weitere Art gemischter Spektren werden wir im nächsten Abschnitt gleich kennenlernen.

§ 5. MhF mit veränderlicher Dichte der Elementfunktionen

Die Klasse der bisher betrachteten mhF kann man zusammenfassend dadurch kennzeichnen, daß für sie die Dichte der einzelnen Elementfunktionen eine Konstante (nämlich die Konzentration c bzw. C) ist. Wir kommen zu einer größeren Mannigfaltigkeit, wenn wir Funktionen zulassen, deren Dichte veränderlich ist. Natürlich kommt nur eine solche Veränderlichkeit in Frage, die den Charakter der mhF erhält, d. h. die Dichte $D(t_j)$ der einzelnen Elementfunktionen muß selbst auch eine mhf sein. Außerdem muß sie selbstverständlich der Bedingung genügen, daß ihr Mittelwert mit der Konzentration übereinstimmt. Wir behandeln zuerst den einfachsten Fall, nämlich daß die Dichte eine periodische Funktion ist, unter der weiteren Voraussetzung der Gleichgestaltigkeit aller Elemente. Dann ergibt die Rechnung des § 2 für das Intervall $(-T/2, T/2)$:

$$K'(\tau) = c \cdot k_f(\tau) + \frac{1}{T} \sum_{\substack{j, k=1 \\ j \neq k}}^N k_f(\tau - t_j + t_k).$$

Aber die Wahrscheinlichkeit der Elementabszissen ist nun:

$$W(t_j) = \begin{cases} \frac{1}{T} \frac{P(t_j)}{c} & \text{im Intervall } (-T/2, T/2) \\ 0 & \text{außerhalb} \end{cases} \quad (53),$$

wo $P(t_j)$ eine periodische Funktion vom Mittelwert c bedeutet. Damit folgt:

$$E\{K'(\tau)\} = c \cdot k_f(\tau) + \frac{1}{c^2} \frac{1}{T^3} \sum_{\substack{j, k=1 \\ j \neq k}}^N \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} P(t_j) P(t_k) k_f(\tau - t_j + t_k) dt_j dt_k.$$

Das geht in der Grenze für große T über in

$$K(\tau) = c \cdot k_f(\tau) + \int_{-\infty}^{\infty} K_P(\tau - \vartheta) k_f(\vartheta) d\vartheta \quad (54).$$

Das letzte Glied stellt im wesentlichen den Produktdurchschnitt $K_P(\tau)$ der Dichtefunktion

$$D(t_j) = P(t_j)$$

dar, jedoch mittels der Gewichtsfunktion $k_f(\vartheta)$ ausgeglichen. Mit der Abkürzung

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_P(\tau - \vartheta) k_f(\vartheta) d\vartheta = [K_P(\tau)]_f \quad (55)$$

haben wir so das Ergebnis:

$$K(\tau) = c \cdot k_f(\tau) + [K_P(\tau)]_f \quad (54a).$$

Der einzige Unterschied gegenüber der Gl. (29a) besteht darin, daß $K^{(P)}(\tau)$ nun eine echte periodische Funktion und nicht wie dort eine Konstante ist.

Die Erweiterung der Überlegung auf Funktionen mit verschiedengestaltigen Elementen ist trivial: Man muß nur $k_f(\tau)$ durch $\tilde{k}_f(\tau)$ ersetzen. Ist auch die Dichtefunktion für die verschiedenen Elementarten verschieden, so muß $K_P(\tau)$ ebenfalls durch das entsprechende Mittel ersetzt werden. Dabei kann unter Umständen der periodische Charakter verloren gehen.

Wir wollen noch die Gl. (54a) entsprechenden Gleichungen für das Spektrum anschreiben:

$$\tilde{K}^{(Q)}(\omega) = c \cdot \tilde{k}_f(\omega) \quad (56),$$

$$\tilde{K}^{(P)}(\omega_n) = [\tilde{K}_P(\omega_n)]_f = 2\pi \tilde{k}_f(\omega_n) \tilde{K}_P(\omega_n) \quad (56a).$$

Man erkennt, wie die Spektrallinien $\tilde{K}^{(P)}(\omega_n)$ durch den Faktor $\tilde{k}_f(\omega_n)$, der ja mit wachsendem ω gegen Null geht, entsprechend geschwächt werden, doch wird in den praktisch meist vorkommenden Fällen für alle Linien mit wesentlicher Intensität ω_n klein gegen die Halbwertsbreite von $\tilde{k}_f(\omega)$ sein, so daß dieser Faktor nur eine geringfügige Korrektur bewirkt.

Es werde nun der allgemeinere Fall behandelt, daß die Dichte eine nicht rein periodische mhf sei. Und zwar wählen wir wieder das einfachste Beispiel, daß die Elementfunktionen $f(t)$

¹⁴⁾ z. B. tages- und jahreszeitliche Gänge.

alle gleichgestaltig sind und ebenso auch die Elementfunktionen $g(t_j)$ der Dichtefunktion. Für das Näherungsintervall $(-T/2, T/2)$ ist dann die Wahrscheinlichkeit der t_j :

$$W(t_j) = \frac{1}{c} \sum_{q=1}^R g(t_j - t_q) \dots \dots \dots (57),$$

$$W(t_q) = \begin{cases} \frac{1}{T} & \text{im Intervall } (-T/2, T/2) \\ 0 & \text{außerhalb} \end{cases} \dots \dots \dots (57a),$$

mit der Nebenbedingung:

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} W(t_j) dt_j = 1 \dots \dots \dots (57b).$$

Damit erhalten wir für den Erwartungswert:

$$\begin{aligned} E\{K'(\tau)\} &= c \cdot k_f(\tau) \\ &+ \frac{1}{c^2} \frac{1}{T^4} \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^N \sum_{q=1}^R \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} g(t_j - t_q) g(t_k - t_q) k(\tau - t_j + t_k) dt_j dt_k dt_q \\ &+ \frac{1}{c^2} \frac{1}{T^5} \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^N \sum_{\substack{q,\sigma=1 \\ q \neq \sigma}}^R \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} g(t_j - t_q) g(t_k + t_\sigma) k(\tau - t_j + t_k) dt_j dt_k dt_q dt_\sigma. \end{aligned}$$

Das ergibt mit

$$\gamma = \frac{R}{T} \dots \dots \dots (58),$$

wie immer im Grenzfall großer T :

$$K(\tau) = c \cdot k_f(\tau) + \gamma \int_{-\infty}^{\infty} k_g(\tau - \vartheta) k_f(\vartheta) d\vartheta + \bar{F}^2 \dots \dots \dots (59).$$

Das zweite Glied stellt wieder einen mittels der $k_f(\vartheta)$ ausgeglichenen Produktdurchschnitt dar:

$$\int_{-\infty}^{\infty} k_g(\tau - \vartheta) k_f(\vartheta) d\vartheta = \int_{-\infty}^{\infty} k_g(\vartheta) k_f(\tau - \vartheta) d\vartheta = [k_g(\tau)]_f \dots \dots \dots (60),$$

so daß wir die Endformel auch schreiben können:

$$K(\tau) = c \cdot k_f(\tau) + \gamma [k_g(\tau)]_f + \bar{F}^2 \dots \dots \dots (59a).$$

Durch die Nebenbedingung (57b) wird in Analogie zu Gl. (31) γ festgelegt:

$$\gamma = \frac{\bar{F}^2}{\int_{-\infty}^{\infty} K_2^{(Q)}(\vartheta) d\vartheta} \dots \dots \dots (61),$$

wo $K_2^{(Q)}(\vartheta)$ den zweiten Summanden von $K(\tau)$ bedeutet. Für den Übergang zu Funktionen mit verschiedengestaltigen Elementfunktionen $f(t)$ und $g(t_j)$ gilt das gleiche, was oben für Funktionen mit periodischer Dichtefunktion gesagt wurde.

Wir hatten in der vorhergehenden Rechnung für die Dichtefunktion

$$D_1(t_j) = \sum_{\sigma=-\infty}^{\infty} g(t_j - t_\sigma), \quad D_2(t_q) = c,$$

also eine mhF vom einfachsten Typ gesetzt. Wir können aber auch ebenso eine solche vom oben betrachteten Typ einsetzen, d. h.

$$D_2(t_q) = \sum_{\sigma=-\infty}^{\infty} h(t_q - t_\sigma), \quad D_3(t_\sigma) = c,$$

und wir können diese Überlegung noch beliebig oft (allerdings nur endlich oft) wiederholen. Wenn wir für die Dichtefunktion höchster Ordnung $D_N(t_{j_{N-1}})$ noch eine periodische Funktion $P(t)$ annehmen, so erhalten wir für den Produktdurchschnitt der allgemeinsten mhF der bisher umfaßten Klasse:

$$K(\tau) = \sum_{\nu=0}^{N-1} C_\nu [\overline{k(\tau)}]_\nu + [\overline{K_P(\tau)}]_N \dots \dots \dots (62).$$

Die Abkürzungen bedeuten hier:

$$\left. \begin{aligned} \nu = 0: & \quad C_0 = C, \quad [k(\tau)]_0 = k(\tau), \\ \nu \neq 0: & \quad [k(\tau)]_\nu = \int_{-\infty}^{\infty} k_{j\nu}(\tau - \vartheta) [k(\vartheta)]_{\nu-1} d\vartheta, \\ & \quad [K_P(\tau)]_N = \int_{-\infty}^{\infty} K_P(\tau - \vartheta) [k(\vartheta)]_{N-1} d\vartheta \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (62a),$$

wobei die Größen mit dem Index 0 die eigentlichen Elemente $f(t)$, diejenigen mit dem Index $\nu = 1, \dots, (N-1)$ die Elemente $f_\nu(t_{j\nu-1})$ der Dichtefunktionen ν -ter Ordnung kennzeichnen.

Für das Spektrum gilt entsprechend:

$$\tilde{K}^{(Q)}(\omega) = \sum_{\nu=0}^{N-1} C_\nu [k(\omega)]_\nu \dots \dots \dots (63)$$

$$\tilde{K}^{(P)}(\omega_n) = [K_P(\omega_n)]_N \dots \dots \dots (63a).$$

Für die „effektiven Konzentrationen“ C_ν^* erhalten wir in voller Analogie zu den Gl. (42) und (49):

$$C_\nu^* = \frac{\bar{F}^2}{\int_{-\infty}^{\infty} K_\nu^{(Q)}(\vartheta) d\vartheta} = \frac{\bar{F}^2}{2\pi \tilde{K}_\nu^{(Q)}(0)} \dots \dots \dots (64).$$

Die Mannigfaltigkeit der mit diesen Formeln umfaßten Funktionen ist so groß, daß wir uns fragen wollen, was diese Mannigfaltigkeit allgemein kennzeichnet. Dazu gehen wir noch einmal auf die einfachsten in § 2 behandelten mhF zurück. Für sie war die Wahrscheinlichkeit aller Elementfunktionen im Intervall $(-T/2, T/2)$ die gleiche Größe $W(t_j) = 1/T$. Darin liegt ein doppeltes: Jede Stelle t der Abszissenachse ist gleichberechtigt, und die einzelnen Elementfunktionen sind völlig unabhängig voneinander. Bei den Funktionen von § 3 blieben diese beiden Eigenschaften für die einzelnen Arten von Elementfunktionen erhalten. In diesem § schließlich wurde die Gleichberechtigung aller Abszissenstellen aufgegeben, nicht aber die zweite der eben genannten Eigenschaften, so daß wir zusammenfassend sagen können: Die von uns bisher erfaßte Funktionenmannigfaltigkeit ist der Klasse aller mhF, die aus statistisch unabhängigen Elementfunktionen aufgebaut sind, isomorph.

§ 6. MhF mit nicht statistisch unabhängigen Elementfunktionen

Die letzte Erweiterung, die wir vornehmen wollen, besteht darin, daß wir nun auch noch die Bedingung der „Unabhängigkeit“ der Elementfunktionen fallen lassen. Zuerst müssen wir diesen Begriff mathematisch präzisieren und gehen dazu nochmals auf die in § 2 behandelten Funktionen zurück. Numerieren wir ihre Elemente derart, daß $t_{j-1} < t_j < t_{j+1}$ (was wir in der Rechnung dort nicht getan hatten!), so folgt aus der da gestellten Bedingung (25) für die Wahrscheinlichkeit, daß der Abstand zweier aufeinanderfolgender Elementfunktionen zwischen ϑ und $\vartheta + d\vartheta$ liegt, die bekannte Formel:

$$W(\vartheta) d\vartheta = e^{-c\vartheta} d(c\vartheta) \dots \dots \dots (65)$$

Aus ihr leiten wir leicht auch die Wahrscheinlichkeit für den Abstand der j -ten und $(j+n)$ -ten Elementfunktion ab:

$$W_n(\vartheta) d\vartheta = \int_0^\vartheta \int_0^{\vartheta-\vartheta_1} \dots \int_0^{\vartheta-\sum_{j=1}^{n-2} \vartheta_j} W(\vartheta_1) W(\vartheta_2) \dots W(\vartheta_{n-1}) W\left(\vartheta - \sum_{j=1}^{n-1} \vartheta_j\right) d\vartheta_1 \dots d\vartheta_{n-1} d\vartheta^{15)} \quad (66).$$

Einsetzen von Gl. (65) ergibt dann sofort:

$$W_n(\vartheta) d\vartheta = \frac{(c\vartheta)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-c\vartheta} d(c\vartheta) \dots \dots \dots (67).$$

Diese Verteilung ist das Kriterium der statistischen Unabhängigkeit. Wir bezeichnen also die Elementfunktionen unserer Funktion als nicht statistisch unabhängig, wenn ihre Verteilung von der hierdurch gegebenen „Normalverteilung“ abweicht. Wir wollen nun den Produktdurchschnitt einer mhF berechnen, die aus lauter gleichgestaltigen Elementen aufgebaut ist, deren $W_n(\vartheta)$ jedoch willkürlich vorgegeben sind, abgesehen von einer einzigen, später zu formulierenden

¹⁵⁾ Die Formel kommt folgendermaßen zustande: Das Produkt bezeichnet die Wahrscheinlichkeit, daß der Abstand zwischen der j -ten und $(j+1)$ -ten Elementfunktion ϑ_1 , zwischen der $(j+1)$ -ten und $(j+2)$ -ten Elementfunktion ϑ_2 beträgt, usw. Über alle möglichen Lagen der Zwischenpunkte wird dann integriert.

Bedingung, die aber für jede vernünftige Verteilung von selbst erfüllt ist. Wir gehen von Gl. (26) in § 2 aus und ordnen die Glieder der Doppelsumme folgendermaßen um:

$$K'(\tau) = c \cdot k(\tau) + \frac{1}{T} \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{m=1}^{N-n} \{k(\tau + t_{m+n} - t_m) + k(\tau - t_{m+n} + t_m)\} \dots (68).$$

Wir können hiervon die mathematische Erwartung bilden, indem wir mit $W_n(\vartheta)$ multiplizieren und über alle positiven ϑ integrieren, da ja die t -Werte nur in der Verbindung $\vartheta = t_{m+n} - t_m$, nicht aber unabhängig voneinander auftreten:

$$E\{K'(\tau)\} = c \cdot k(\tau) + \frac{1}{T} \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{m=1}^{N-n} \int_0^\infty W_n(\vartheta) \{k(\tau + \vartheta) + k(\tau - \vartheta)\} d\vartheta \dots (68a).$$

Man kann die Summation über m , welches ja unter dem Integral nicht mehr vorkommt, ausführen und erhält in der Grenze großer T :

$$\begin{aligned} K(\tau) &= c \cdot k(\tau) + c \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty W_n(\vartheta) \{k(\tau + \vartheta) + k(\tau - \vartheta)\} d\vartheta \\ &= c \cdot k(\tau) + c \int_{-\infty}^\infty \sum_{n=1}^\infty W_n(|\vartheta|) k(\tau - \vartheta) d\vartheta. \end{aligned}$$

Ist $W_n(\vartheta)$ die Normalverteilung, so bekommt die Summe unter dem Integral den Wert c und dieses nimmt dann in selbstverständlicher Übereinstimmung mit Gl. (29) von § 2 die Gestalt

$$c^2 \cdot \int_{-\infty}^\infty k(\vartheta) d\vartheta = \bar{F}^2$$

an. Für den allgemeinen-Fall führen wir die „statistische Anomalie“

$$u(\vartheta) = \sum_{n=1}^\infty W_n(|\vartheta|) - c \dots (69)$$

ein. Diese Größe soll eine integrierbare Funktion sein¹⁶⁾. Das ist gleichbedeutend damit, daß $\sum_{n=1}^\infty W_n(\vartheta)$ für alle positiven ϑ existiert und in der Grenze großer ϑ gegen c (das ist die Summe der Normalverteilungen (67)) strebt.

Dann nimmt unsere Gleichung die endgültige Gestalt an:

$$K(\tau) = c \left\{ k(\tau) + \int_{-\infty}^\infty u(\vartheta) k(\tau - \vartheta) d\vartheta \right\} + \bar{F}^2 \dots (70).$$

Wir wollen das hier neu auftretende Integralglied diskutieren. Es bewirkt eine Verzerrung von $K^{(Q)}(\tau)$ derart, daß $k(\tau)$ und $K^{(Q)}(\tau)$ nun nicht mehr von gleicher Form sind. Ist die Verteilung „übernormal“ (d. h. im Bild: „Die Elementfunktionen ziehen sich an“), so ist $u(\vartheta)$ positiv und $K^{(Q)}(\tau)$ wird vergrößert, bei „unternormaler“ Verteilung („Die Elementfunktionen stoßen sich ab“) ist $u(\vartheta)$ negativ, $K^{(Q)}(\tau)$ wird verkleinert. $u(\vartheta)$ kann aber auch abwechselnd positiv und negativ sein. Wir können diesen Tatbestand auch so beschreiben: Die Anomalie bewirkt, daß sich der durch \bar{F} gegebenen Geraden symmetrisch zum Nullpunkt der τ -Achse ein „Hügel“ (wenn $u(\vartheta)$ positiv ist), eine „Mulde“ (wenn $u(\vartheta)$ negativ ist) oder gar eine Folge von Erhöhungen und Vertiefungen bildet, (wenn $u(\vartheta)$ um Null herum schwankt), so daß $c \cdot k(\tau)$ nicht mehr wie früher einer Geraden, sondern dieser unter Umständen sehr komplizierten Kurve überlagert ist.

Wenn wir das „Anomalieperiodogramm“¹⁷⁾

$$\tilde{u}(\omega) = \int_{-\infty}^\infty u(\vartheta) \frac{e^{-i\omega\vartheta}}{\sqrt{2\pi}} d\vartheta \dots (71)$$

einführen, so nimmt die der Gl. (70) analoge Beziehung für das Spektrum die einfache Gestalt

$$\tilde{K}^{(Q)}(\omega) = c \{1 + \sqrt{2\pi} \tilde{u}(\omega)\} \tilde{k}(\omega) \dots (72),$$

$$\tilde{K}^{(P)}(0) = \bar{F}^2 \dots (72a)$$

an. Führen wir noch zur Abkürzung das „reduzierte Produktintegral“

¹⁶⁾ Nicht notwendig quadratisch integrierbar. $u(\vartheta)$ kann durchaus auch δ -Funktions-Bestandteile enthalten. Ist

$$W_n(\vartheta) = \delta(\Theta n - \vartheta), \quad \text{also} \quad u(\vartheta) = \sum_{n=1}^\infty \delta(\Theta n - |\vartheta|) - c,$$

so erhalten wir eine rein periodische Funktion der Periode Θ .

¹⁷⁾ Wir dürfen nicht „Spektrum“ sagen, da dieses seinem Wesen nach eine nichtnegative Funktion ist.

$\tilde{u}(\omega)$ kann aber sehr wohl negative Werte annehmen, wenn auch nie kleiner als $-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ werden, da sonst $\tilde{K}(\omega)$ negativ werden müßte, was aber einen Widerspruch ergäbe.

$$\kappa(\tau) = k(\tau) + \int_{-\infty}^{\infty} u(\vartheta) k(\tau - \vartheta) d\vartheta \quad (73)$$

bzw. das „reduzierte Spektrum“

$$\tilde{\kappa}(\omega) = \{1 + \sqrt{2\pi} \tilde{u}(\omega)\} \tilde{k}(\omega) \quad (73a)$$

ein, so können wir damit formal unsere Gln. (70) und (72) auf dieselbe Form bringen wie die Gleichungen (29a) und (32) von § 2 und können dann auch die Erweiterungen des § 3 und 5 genau so vornehmen. An diese letztgenannte Erweiterung allerdings wollen wir noch einige Bemerkungen anknüpfen:

Ersetzen wir c durch die variable Dichtefunktion $D(t)$, so gilt für solche Funktionen die Normalverteilung nicht mehr in der einfachen Gestalt der Gl. (65), sondern wir haben statt dessen die allgemeinere Verteilung für den Abstand des Nachbarelements von einem Element an der Stelle t :

$$W(\vartheta) d\vartheta = D(t + \vartheta) e^{-\int_t^{t+\vartheta} D(t) dt} d\vartheta \quad (74)$$

und entsprechend für den Abstand des n -ten Elements:

$$\left. \begin{aligned} W_n(\vartheta) d\vartheta &= D(t + \vartheta) e^{-\int_t^{t+\vartheta} D(t) dt} \int_t^{t+\vartheta} \int_t^{t+\vartheta_{n-1}} \dots \int_t^{t+\vartheta_2} D(\vartheta_1) \dots D(\vartheta_{n-1}) d\vartheta_1 \dots d\vartheta_{n-1} d\vartheta \\ &= D(t + \vartheta) \frac{\left(\int_t^{t+\vartheta} D(t) dt\right)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\int_t^{t+\vartheta} D(t) dt} \quad (75). \end{aligned} \right\}$$

Diese Formeln sind allerdings mit den Formeln (65) bzw. (67) solange praktisch gleich, wie n/c klein gegen die Größe des t -Intervalls ist, in denen sich $D(t)$ merklich ändert.

Wir können damit nun leicht die Anteile des Produktdurchschnitts, die von den $D(t)$ -Schwankungen herrühren, als Wirkung einer statistischen Anomalie auffassen. Allerdings müssen wir diese dann noch allgemeiner definieren, denn, indem wir $W_n(\vartheta)$ als Funktion von t auffassen, müssen wir in Gl. (68a) eine weitere Mittelung durchführen, und dann ergibt sich an Stelle von Gl. (69):

$$u(\vartheta) = \frac{1}{c} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} D(t) \sum_{n=1}^{\infty} W_n(|\vartheta|) dt - c \quad (76).$$

Hier ist es nicht mehr vernünftig, die Forderung, daß $u(\vartheta)$ integrierbar sein muß, aufrecht zu erhalten, sondern man wird zulassen, daß diese Funktion auch periodisch um Null schwanken kann. Das Anomalieperiodogramm wird in diesem Fall auch Linien enthalten, sonst hat dies aber keine weiteren Folgen. In diese Formel setzen wir nun unsere Verteilung (75) ein und erhalten dann, da

$$\sum_{n=1}^{\infty} W_n(\vartheta) = D(t + \vartheta),$$

für die statistische Anomalie:

$$u(\vartheta) = \frac{1}{c} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} D(t) D(t + \vartheta) dt - c = \frac{1}{c} K_D(\vartheta) - c.$$

Das ergibt aber, in Gl. (70) eingesetzt,

$$K(\tau) = c \cdot k(\tau) + \int_{-\infty}^{\infty} K_D(\vartheta) k(\tau - \vartheta) d\vartheta \quad (77),$$

also, in eine etwas allgemeinere Schreibweise gefaßt, genau das Ergebnis der Rechnung des § 5.

Diese Erkenntnis bedeutet zwar an sich, abgesehen von der allgemeinen Formel für die Anomalie, keinen besonderen Fortschritt, aber sie zeigt doch den engen Zusammenhang zwischen jener einfacheren Betrachtungsweise in § 5 und der hier verwendeten viel allgemeineren. Damit haben wir aber nun die größte Klasse von Funktionen, die überhaupt auf unsere Weise einer Beschreibung zugänglich sind, grundsätzlich erfaßt.

¹⁸⁾ Die Ableitung geht hier genau so wie im Fall konstanter Wahrscheinlichkeitsdichte. Die Umwandlung des n -fachen Integrals in die n -te Potenz eines gewöhnlichen Integrals gelingt mittels fortgesetzter partieller Integration.

Fließgesetze normal-zäher Stoffe im Rohr

Ein Beitrag zur Rheologie

Von L. Prandtl, unter Mitwirkung von Fr. Vandrey¹⁾

Unter „Normalzähen Stoffen“ werden hier Stoffe verstanden, deren Fließgesetz $\dot{\gamma} = f(\tau)$ durch die Formel $f(\tau) = C \sinh \tau/A$ angenähert werden kann, mit $\dot{\gamma}$ = Deformationsgeschwindigkeit und τ = Schubspannung. Aufgabe der Abhandlung ist die Berechnung der Abhängigkeit der Durchflußmenge eines solchen Stoffes in einem geraden kreiszylindrischen Rohr vom Druckgefälle, ferner die Errechnung der Konstanten A und C vorgelegter Stoffe aus den Messungsergebnissen.

For materials called here „normal-viscous“ the law of flow, $\dot{\gamma} = f(\tau)$ is described approximately by the formula $f(\tau) = C \sinh \tau/A$ ($\dot{\gamma}$ = rate of strain, τ = shearing stress). Considering materials of such kind the paper aims to calculate the rate of flow through a straight circular pipe for given pressure gradients. Also a method is indicated how to compute the constants A and C for given materials from measurements.

Des substances, dont la loi de flux $\dot{\gamma} = f(\tau)$ peut être approximée par $f(\tau) = C \sinh \tau/A$, sont dénommées „de viscosité normale“; $\dot{\gamma}$ vitesse de la déformation, τ tension tangentielle. Le présent essai a pour but de calculer pour une telle substance la quantité d'écoulement à travers une tube droite cylindrique dans sa dépendance du gradient de la pression. Une méthode pour déterminer les constantes A et C des mesures pour des substances quelconques est démontrée.

Под „нормально-вязкими материалами“ здесь понимаются такие, условие текучести которых $\dot{\gamma} = f(\tau)$ может быть приближенно выражено формулой $f(\tau) = C \sinh \tau/A$, где $\dot{\gamma}$ = скорость деформации, а τ = сдвигающее напряжение. Данное исследование ставит себе задачей определить зависимость протекающего количества такого вещества от градиента давления при протекании в прямой цилиндрической круглой трубе. Кроме того вычисляются для данных материалов постоянные A и C из результатов измерений.

1. Einleitung

Die theoretischen Betrachtungen des Verfassers von 1928 [1] über die Häufigkeit von Platzwechseln der Molekeln in einem unter Spannung stehenden festen oder zähflüssigen Körper haben zu Beziehungen geführt, die sich für konstante Fließgeschwindigkeit $\dot{\gamma}$, die im folgenden mit c bezeichnet werden soll, durch die Formel

$$c = C \sinh (\tau/A) \quad (1)$$

annähern lassen. C und A sind dabei Stoffkonstanten. Soweit Temperaturunterschiede in Frage kommen, sind beide als Temperaturfunktionen zu betrachten. Formel (1) ist von A. Nádai 1939 an den langsamen Kriechbewegungen von belasteten Metallstäben bei hohen Temperaturen recht befriedigend bestätigt worden [2]²⁾.

Es ist zu erwarten, daß dasselbe Verhalten auch bei stark zähen Flüssigkeiten auftritt, soweit die Struktur dieser Substanzen genügend stabil ist, um nicht durch zeitliche Vorgänge oder auch durch den Meßvorgang selbst verändert zu werden. (Bei den Untersuchungen der „Rheologen“ laufen häufig derartige Vorgänge nebenher). Stoffe der gekennzeichneten Art sollen hier mit dem Namen „normal-zäh“ gekennzeichnet werden. Die gewöhnliche zähe Flüssigkeit („Newtonsche Flüssigkeit“ mit $c = \tau/\eta$) entspricht in Gleichung (1) dem Grenzfall $\tau \ll A$. Die gewöhnliche Zähigkeit η ist hier $= A/C$.

Bild 1 zeigt ein Schaubild für Gleichung (1). Gemäß der in der Festigkeitslehre üblichen Darstellungsform ist die Umkehrfunktion von Gl. (1), also $\tau = A \operatorname{Ar} \sinh c/C = A \ln [c/C + \sqrt{1 + (c/C)^2}]$ wiedergegeben, und zwar in drei Maßstäben von c/C , um den ausgedehnten Zahlen-

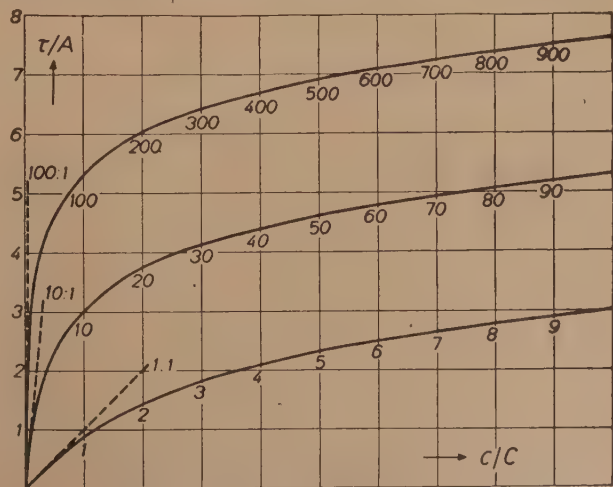


Bild 1. Schubspannung τ abhängig von der Gleitgeschwindigkeit c

¹⁾ Der Verfasser verdankt Herrn Vandrey, der sich ihm zwischen der Beendigung seiner Göttinger Tätigkeit und seiner Übersiedlung nach England auf zwei Wochen zur Verfügung gestellt hat, die Reihenentwicklungen (4) und (5) und die numerischen Rechnungen hierzu, besonders aber die Auffindung der Lösung der Aufgabe des 4. Abschnitts und die graphischen Darstellungen der Abbildungen 4 und 7.

²⁾ Über die hauptsächlichsten Gedanken seiner Arbeit von 1928 hat der Verfasser kürzlich in den „Physikalischen Blättern“ berichtet und dabei besonders rheologische Zusammenhänge berührt [3]. Er hat sich auch dort ausdrücklich auf stabile Stoffe beschränkt.

bereich dieser Größe zur Anschauung zu bringen. Die gestrichelt gezeichnete Anfangstangente stellt das Newtonsche Verhalten dar.

Die gegenwärtige Abhandlung ist der speziellen Aufgabe gewidmet, die Formeln zu entwickeln, die an Stelle des Hagen-Poiseuilleschen Gesetzes zu treten haben, wenn es sich um solche stabile „Nicht-Newtonsche Flüssigkeiten“ handelt, für deren Fließgesetz die Gl. (1) eine brauchbare Näherung liefert (Es ist zu erwarten, daß amorphe Stoffe, wie Pech, geschmolzenes Glas und ähnliche, besonders typische Vertreter dieser Gruppe sind). Um einen kurzen Namen für solche Stoffe zu haben, sollen sie hier „normalzähe Stoffe“ genannt werden.

Die erste Aufgabe wird in der Ermittlung der Geschwindigkeitsverteilung bestehen, die bei gegebenem konstantem Druckgefälle für die Längeneinheit, $-\frac{dp}{dx} = p'$, in einem Rohr vom

Innenradius R auftritt. Im Zusammenhang damit ergibt sich leicht die Durchflußmenge Q für die Zeiteinheit, die beim Versuch gemessen werden kann. Da diese hier nicht mehr proportional mit dem Druckgefälle ist, ergibt sich keine konstante „Zähigkeit η “ mehr. Wir wollen die Zähigkeit nach der Hagen-Poiseuilleschen Formel, $\eta = \pi R^4 p' / 8 Q$, trotzdem als bequeme Rechengröße beibehalten. Je nachdem man diese Pseudozähigkeit abhängig von der Durchflußmenge oder abhängig vom Druckgefälle aufträgt, ergeben sich dann zwei etwas verschiedene Kurven, vgl. Bild 5 und 6.

2. Geschwindigkeitsverteilung und Durchflußmenge

Der Ansatz erfolgt ganz entsprechend dem für Newtonsche Flüssigkeiten:

Das Kräftegleichgewicht in der unbeschleunigten Strömung verlangt in bekannter Weise eine Schubspannung im Radius r

$$\tau = p' r / 2^3)$$

Die Geschwindigkeit u ist $= 0$ für $r = R$ (Haften an der Wand!); sie sei positiv für alle Radien $r < R$. Dann ist gemäß Gl. (1)

$$c = -du/dr = C \sin(p'r/2A).$$

Mit der Abkürzung $p'/2A = \alpha$ ergibt dies integriert

$$u(r) = \int_r^R du = C/\alpha (\cos \alpha R - \cos \alpha r) \dots \dots \dots (2).$$

Damit kann die Durchflußmenge in der Zeiteinheit $Q = 2\pi \int_r^R ur dr$ gebildet werden. Durch partielle Integration ergibt sich

$$Q = 2\pi C R^2/\alpha \left[\frac{1}{2} \cos \alpha R - \frac{1}{2\alpha R} \sin \alpha R + \frac{1}{\alpha^2 R^2} (\cos \alpha R - 1) \right] \dots \dots \dots (3).$$

Für die praktischen Rechnungen empfiehlt es sich, Reihenentwicklungen nach der Dimensionslosen αR zu verwenden, Potenzreihen für kleine Werte von αR , Ausdrücke mit $e^{\alpha R}$ und $e^{-\alpha R}$ für die größeren Werte. Setzt man der Kürze halber $\alpha R = p'R/2A = a$, so ergeben sich nach den Vandrey'schen Ermittlungen für den Ausdruck in den eckigen Klammern in Gl. (3), der jetzt $f(a)$ heißen soll, die beiden Ausdrücke

$$f(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(2n+1)}{(2n+2)!} \cdot a^{2n} = \frac{1}{8} a^2 + \frac{1}{72} a^4 + \frac{1}{1920} a^6 + \frac{1}{100800} a^8 + \dots \dots \dots (4)$$

und

$$f(a) = e^{\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2a} + \frac{1}{2a^2}\right)} - \frac{1}{a^2} + e^{-a} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2}\right) \dots \dots \dots (5).$$

Für großes a reduziert sich Gl. (5) praktisch auf

$$f(a) \approx e^{\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2a} + \frac{1}{2a^2}\right)} \dots \dots \dots (6).$$

Die Näherungsformel (6) ist bei $a = 5$ schon auf 2 Dezimalen, bei $a = 7$ bereits auf 4 Dezimalen genau. Für sehr große Werte von a kann $f(a) \approx e^a/4$ gesetzt werden.

Bei der numerischen Arbeit empfiehlt es sich, statt der Funktion $f(a)$, die mit dem Glied $a^2/8$ beginnt, eine neue Funktion $\varphi(a) = 8 f(a)/a^2$ einzuführen, die bei $a = 0$ mit dem Wert 1 beginnt, und die daher bei praktischen Aufgaben regelmäßig auftritt. Aus der Reihe (4) findet sich

$$\varphi(a) = 1 + \frac{a^2}{9} + \frac{a^4}{240} + \frac{a^6}{12600} + \dots \dots \dots (7)$$

³⁾ Gleichgewicht eines coaxialen Zylinders vom Radius r und der Länge l : es ist $\tau \cdot 2\pi r l = p' l \cdot \pi r^2$.

und aus der asymptotischen Näherungsformel (6)

$$\varphi(a) = 2 e^{a/a^2} \left(1 - \frac{2}{a} + \frac{2}{a^2} \right) \dots \dots \dots (8);$$

asymptotisch ist

$$\varphi(a) \approx 2 e^{a/a^2} \dots \dots \dots (8a).$$

Zahlentafel I gibt die Werte von $\varphi(a)$ für $a = p' R/2 A$ zwischen $a = 0$ und $a = 10$ wieder. Bild 2 zeigt den Verlauf von $\log \varphi(a)$ abhängig von $\log a$ nach der Tabelle und nach der Näherungsformel (8) und (8a). Die letztere ist jedoch wenig genau, sie gibt bei $a = 10$ noch 18 v.H., bei $a = 20$ noch 9,5 v.H. zu viel.

Tafel I. $\varphi(a)$ nach Gl. (7) und (8)

a	$\varphi(a)$	a	$\varphi(a)$	a	$\varphi(a)$	a	$\varphi(a)$	a	$\varphi(a)$
0,00	1,000	1,5	1,272	3,0	2,402	4,5	5,800	7,0	33,81
0,10	1,001	1,6	1,313	3,1	2,529	4,6	6,185	7,2	39,31
0,20	1,004	1,7	1,358	3,2	2,671	4,7	6,599	7,4	45,80
0,30	1,010	1,8	1,407	3,3	2,821	4,8	7,056	7,6	53,35
0,40	1,018	1,9	1,459	3,4	2,982	4,9	7,540	7,8	62,31
0,50	1,028	2,0	1,517	3,5	3,155	5,0	8,061	8,0	72,78
0,60	1,041	2,1	1,578	3,6	3,341	5,2	9,234	8,2	85,10
0,70	1,055	2,2	1,645	3,7	3,541	5,4	10,60	8,4	99,64
0,80	1,073	2,3	1,716	3,8	3,757	5,6	12,18	8,6	116,7
0,90	1,093	2,4	1,794	3,9	3,988	5,8	14,02	8,8	136,9
1,0	1,115	2,5	1,873	4,0	4,238	6,0	16,18	9,0	160,6
1,1	1,141	2,6	1,968	4,1	4,507	6,2	18,69	9,2	188,6
1,2	1,169	2,7	2,065	4,2	4,794	6,4	21,64	9,4	221,6
1,3	1,200	2,8	2,168	4,3	5,101	6,6	25,09	9,6	260,6
1,4	1,234	2,9	2,281	4,4	5,438	6,8	29,10	9,8	306,7
1,5	1,272	3,0	2,402	4,5	5,800	7,0	33,81	10,0	361,3

3. Verschiedene Einzelausführungen

Nach Gl. (3) war die Durchflußmenge

$$Q = 2\pi CR^2/\alpha \cdot f(a).$$

Mit $a = \alpha R$ ist $1/\alpha = R/a$, also

$$Q = \pi CR^3 \cdot 2f(a)/a.$$

Bei Einführung von $\varphi(a) \cdot a^2/8$ für $f(a)$ wird

$$Q = \pi CR^3 \cdot a/4 \cdot \varphi(a) = \pi CR^3 \cdot \varphi(a) \dots (9)$$

oder mit $a = p' R/2 A$ auch

$$Q = \frac{\pi C}{8 A} R^4 \cdot p' \cdot \varphi(a)^4 \dots (10).$$

Im Grenzfall $a \rightarrow 0$, wo $\varphi(0) = 1$ wird, und $A/C = \eta_0$ mit der Newtonschen Zähigkeit identisch wird, geht also Gl. (10), wie es sein muß, in die Formel $Q = \pi R^4 p'/8 \eta_0$ der Hagen-Poiseuilleschen Strömung über.

Wenn die Stoffkonstanten unverändert bleiben, der Druckabfall aber alle Werte von Null an durchläuft, so läuft auch a durch alle Werte. Der Verlauf der Durchflußmenge ist dabei aus Gl. (9) am besten zu erkennen. Er ist aus Bild 3 zu ersehen, die die Funktion $\varphi(a) = a \varphi(a)/4$ abhängig von a wiedergibt. Auf die qualitative Ähnlichkeit mit Bild 1, die das Elementargesetz darstellt, sei hingewiesen.

Bild 4 zeigt den Gang des Geschwindigkeitsprofils u/\bar{u} mit a nach Gl. (2). (Die mittlere Geschwindigkeit \bar{u} ist $= Q/\pi R^2$.) Mit wachsendem a werden die bei $a \rightarrow 0$ paraboloidförmigen Profile immer mehr abgeflacht. Die Grenze $a \rightarrow \infty$ bedeutet den idealplastischen Körper. Der Ausfluß von Zahnpasta aus der Tube ist ein Beispiel für sehr hohe a bei sehr kleinem A .

Die Schubspannung an der Rohrwand, τ_1 , ergibt sich nach früherem zu $c_1 = p' R/2$. Das Argument in Gl. (1), τ_1/A , also das Verhältnis der Wandschubspannung τ_1 zu der für den Stoff charakteristischen Spannung A , ist demnach $= p' R/2 A$, also $= a$. Man erkennt hieraus, warum diese Größe im Mittelpunkt unserer Rechnungen steht.

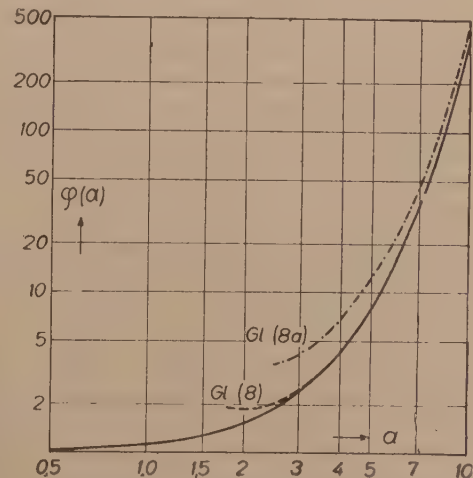
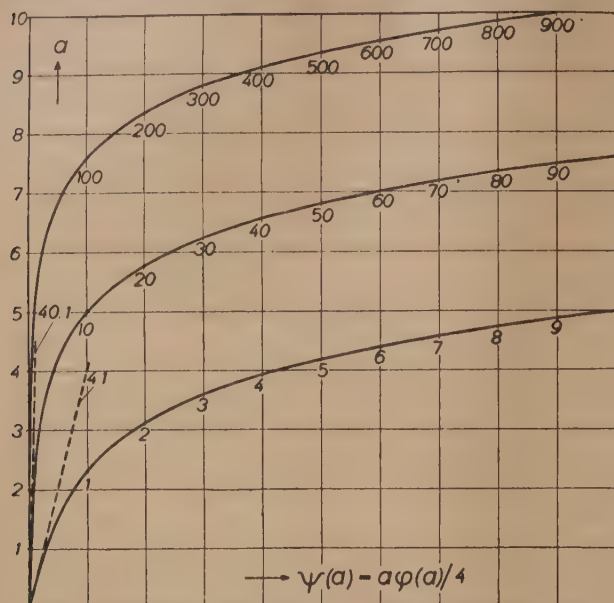
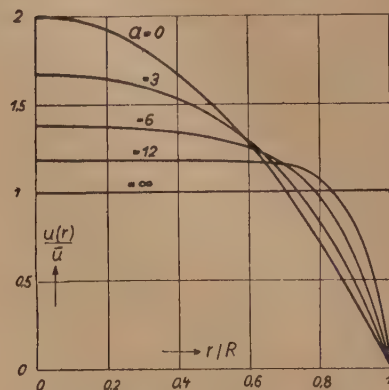


Bild 2. Doppeltlogarithmische Darstellung von $\varphi(a)$. Die beiden Näherungen Gl. (8) und Gl. (8a) sind gestrichelt beigelegt

*) Diese Formel mit der Reihe (7) für $\varphi(a)$ findet sich auch bei Vandrey.

Wie schon in der Einleitung erwähnt, ist die Zähigkeit, die eine Newtonsche Flüssigkeit haben müßte, um bei gleicher Durchflußmenge Q in demselben Rohr denselben Druckabfall und nach obigem auch dieselbe Wandschubspannung zu liefern wie ein konkreter Fall einer Nicht-Newtonschen Flüssigkeit, ebenfalls eine lehrreiche Hilfsgröße. Sind C und A die Stoffgrößen

Bild 3. Verlauf von $\psi(a)$ (Durchflußmenge abhängig vom Druckgefälle)Bild 4. Geschwindigkeitsprofil $u(r)/\bar{u}$ abhängig von a

dieser Flüssigkeit, ferner Q die Durchflußmenge und p' der Druckabfall, so ist die „rechnerische Zähigkeit“

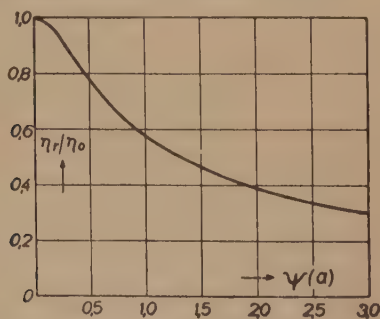
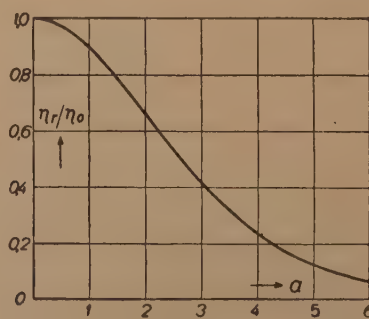
$$\eta_r = \pi R^4 p' / 8 Q \quad (11)$$

Wenn wieder wie oben die Stoffkonstanten A und C fest bleiben sollen, dann läßt sich η_r abhängig von a angeben. Mit Q nach Gl. (9) und $p' = a \cdot 2 A/R$ sowie $A/C = \eta_0$ findet man

$$\eta_r = \eta_0 / \psi(a) \quad (12)$$

η_r nimmt also mit wachsendem a , d. h. wachsendem p' zuerst wenig, später immer stärker ab, s. Bild 2. Abhängig von Q , also von $\psi(a)$, ergibt sich ein Verlauf nach Bild 5.

Man sieht hieraus, daß für Veränderlichkeit von η nicht immer eine „Strukturviskosität“ vorzuliegen braucht, sondern auch normalzähes Verhalten eine bestimmte Form einer solchen Veränderlichkeit hervorbringen kann.

Bild 5. η_r/η_0 abhängig von $\psi(a)$, d. h. von der DurchflußmengeBild 6. η_r/η_0 abhängig von a , d. h. vom Druckgefälle

4. Ermittlung der Stoffkonstanten A und C aus Meßergebnissen

Die Lösung dieser Aufgabe verdanke ich völlig Herrn Vandrey. Der hier abgedruckte Text enthält gegenüber den Vandreyschen Rechnungen einige leichte, meist formale Abänderungen, die sich aus inzwischen erreichten Resultaten des Verfassers ergeben haben.

Die Aufgabe sei in der Form gestellt, daß mit dem zu untersuchenden Stoff zwei Messungen gemacht werden, bei denen für zwei Druckabfälle für die Längeneinheit des Rohres p'_1 und p'_2 zwei Durchflußmengen in der Zeiteinheit Q_1 und Q_2 festgestellt werden. Hieraus sollen die zwei Konstanten A und C der Gl. (1) ermittelt werden. A ist eine Spannung (Kraft auf der Flächeneinheit, Einheit z. B. dyn/cm² oder kp/cm² ⁵⁾), C eine reziproke Zeit (Einheit z. B. 1/sec oder

⁵⁾ „Kilopond“, technische Krafteinheit, früher Kilogramm genannt.

1/Std., wenn Q in cm^3/sec oder $\text{cm}^3/\text{Std.}$ gemessen wird). Beide Versuche mögen mit demselben Rohr vorgenommen werden oder aber auch mit zwei verschiedenen Rohren vom Halbmesser R_1 und R_2 . Dieser allgemeinere Fall bringt keine Erschwerung der Aufgabe und mag deshalb hier als vorliegend angenommen werden.

Die in den theoretischen Formeln in den Vordergrund gestellte Dimensionslose $\alpha = p'R/2A$ ist hier zunächst nicht greifbar, da sie die Unbekannte A enthält; dagegen ist $p'_1 R_1$ und $p'_2 R_2$ bekannt. Da a_1 und a_2 gesucht werden, empfiehlt es sich aus den Meßwerten auch Dimensionslose zu bilden. Vandrey wählte $p'_1 R_1/p'_2 R_2 = \xi$ und $\eta_2/\eta_1 = \zeta$, wobei η_1 und η_2 die rechnerischen Zähigkeiten nach Formel (11) sind. Wenn $p'_2 R_2 > p'_1 R_1$ ist, dann ist $0 < \xi < 1$ und $0 < \zeta < 1$, wie sich aus dem Vergleich von (9) und (11) ergibt. Wegen der Konstanz von A ist $a_1 = \xi a_2$. Wir wollen a_2 als unsere Unbekannte ansehen; nach (11) ist, da $\eta_0 = A/C$ ein Festwert ist,

$$\zeta = \varphi(\xi a_2)/\varphi(a_2) \dots \dots \dots (13).$$

Diese Gleichung kann gelöst werden, indem man an Hand von Tafel 1 die rechte Seite von (11) probeweise für verschiedene Zahlwerte von a_2 ermittelt und sich so systematisch dem Zahlwert ζ annähert. Herr Vandrey hat für eine Reihe von runden Werten von α und von ξ aus Gl. (13) die zugehörigen Werte von ζ ermittelt (die später noch etwas ergänzt wurden) und er hat hiermit ein Nomogramm hergestellt, mit dem sehr rasch Näherungswerte für a_2 gewonnen werden können, vgl. Bild 7. Das obige Probiervorgehen braucht dann erst angewendet werden, wenn genauere Werte verlangt werden, als das Nomogramm sie liefert. Die Zahlentafel 2,

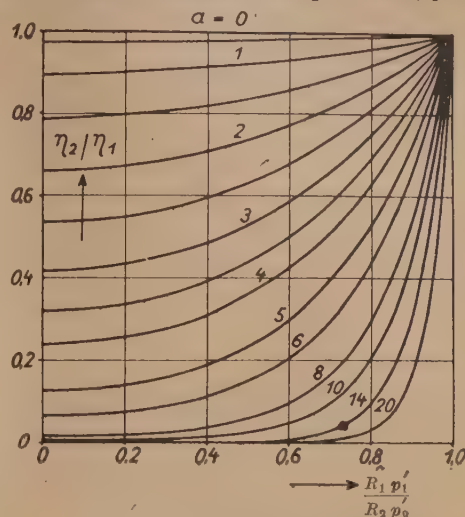


Bild 7. Nomogramm für Gleichung (12)

Tafel 2. ζ abhängig von α und ξ *)

$\xi =$	0	0,2	0,4	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\alpha = 1$	0,898	0,900	0,915	0,933	0,945	0,960	0,980	1,000
2	0,660	0,674	0,708	0,772	0,815	0,867	0,927	1,000
3	0,417	0,433	0,487	0,586	0,658	0,748	0,859	1,000
4	0,236	0,253	0,310	0,424	0,512	0,630	0,788	1,000
5	0,124	0,138	0,188	0,298	0,392	0,526	0,720	1,000
6	0,062	0,072	0,111	0,207	0,296	0,436	0,655	1,000
7	0,030	0,037	0,064	0,142	0,223	0,360	0,641	1,000
8	0,014	0,018	0,037	0,097	0,167	0,298	0,541	1,000
9	0,006	0,014	0,021	0,066	(0,125)	0,245	(0,492)	1,000
10	0,003	0,004	0,012	0,045	0,094	0,201	0,445	1,000
12	0,000	0,001	0,004	0,021	0,052	0,136	(0,363)	1,000
14	0,000	0,000	0,001	0,009	0,029	(0,095)	(0,306)	1,000

die ζ abhängig von a_2 und ξ wiedergibt, mag zur Herstellung des Nomogramms in größerem Maßstab dienen.

Sobald a_2 ermittelt ist, findet man

$$A = p'_2 R_2 / 2 a_2 \dots \dots \dots (14)$$

und

$$C = Q_2 / \pi R_2^3 \cdot \psi(a_2) \dots \dots \dots (15)$$

mit ψ gemäß Gl. (9) und Bild 3. Für kleine Werte von a_2 wird das Verfahren ungenau, da hier wegen Annäherung an den Newtonschen Zustand A und C ihren Sinn verlieren. Sie nehmen bei $\alpha = 0$ beide die Form $0/0$ an und nur A/C liefert einen gut definierten Grenzwert. Für große a_2 dagegen, wo das Nomogramm versagt, kann aus der hier recht genauen Formel (8) für $\varphi(a)$ ein Weg gewonnen werden, die Aufgabe zu lösen. Vorerst mag die für extreme Fälle verwendbare, noch einfachere Formel (8a) verwendet werden. Nach Gl. (9) ist

$$Q = \pi C R^3 \cdot \varphi(a) \cdot a/4 \approx \pi C A R^2 / p'_1 \cdot e^{p'R/2A} \dots \dots \dots (16)$$

Nach Bildung von Q_2/Q_1 kann nach A aufgelöst werden. Es wird

$$A = (p'_2 R_2 - p'_1 R_1) / 2 \ln \frac{Q_2 p'_2 R_1^3}{Q_1 p'_1 R_2^3} \dots \dots \dots (17).$$

*) Einklammernte Werte sind interpoliert.

Mit A ergibt sich aus (16) auch C .

Für mittelgroße a kann jetzt aus der genaueren Gl. (8), gegebenenfalls unter mehrmaliger Iteration, ein verbesserter Wert von A gefunden werden.

Schrifttum

- [1] L. Prandtl, Ein Gedankenmodell zur kinetischen Theorie der festen Körper. Z. angew. Math. Mech. 8 (1928), S. 85, vgl. auch Th. v. Kármán, Encyklop. d. mathem. Wissensch. IV 4 (1913) S. 767, ferner J. M. Burgers, First Report on Viscosity and Plasticity in Verh. d. Königl. Akad. d. Wiss. Amsterdam, I. Section XV, 3 (1935), S. 41.
- [2] A. Nádaï, The Influence of Time upon Creep. The Hyperbolic Sine Creep Law. Stephen Timoshenko 60th Anniversary Volume, New York 1938, S. 155; vgl. auch A. Nádaï und P. G. Mc Vetty, Hyperbolic Sine Chart for estimating Working Stresses of Alloys at elevated Temperatures. Journal Amer. Soc. for Testing Materials 43 (1943), S. 735.
- [3] L. Prandtl, Betrachtungen zur Rheologie. Physikal. Blätter 5 (1949), S. 161.

Eingegangen am 12. Sept. 1949.

Zur Bestimmung der Eigenwerte einer Matrix durch Iteration

Von Alfred Vogel in Stuttgart

Es werden verschiedene Verfahren zur Bestimmung der Eigenwerte und Eigenvektoren einer Matrix angegeben und auf ihre praktische Brauchbarkeit für numerische Berechnungen verglichen.

For the determination of the eigen-values and the characteristic vectors of a matrix, several methods are given, and their usefulness for numerical computation is compared.

Plusieurs méthodes sont données pour la détermination des valeurs propres et des vecteurs propres d'une matrice; les méthodes sont comparées à l'égard de leur utilité pour une évaluation numérique.

Даются различные методы определения собственных значений и векторов матрицы и сравниваются относительно их практической пригодности при вычислениях.

1. Einleitung

Nach der teils graphischen, teils numerischen Bestimmung der Eigenwerte gewisser Randwertprobleme durch L. Vianello¹⁾, J. J. Koch²⁾ und F. H. van den Dungen³⁾ haben R. von Mises und H. Pollaczek-Geiringer⁴⁾ einen zusammenfassenden Bericht über praktische Verfahren zur Eigenwertberechnung gegeben. Sie legen das lineare Gleichungssystem $\mathfrak{x} = \lambda \mathfrak{A} \mathfrak{x}$ mit reeller symmetrischer Matrix \mathfrak{A} zugrunde und bestimmen zunächst den kleinsten Eigenwert durch Iteration eines beliebigen Anfangsvektors \mathfrak{z}_0 und Quotientenbildung entsprechender Komponenten von aufeinanderfolgenden Iterationsvektoren. Zur Berechnung des nächsthöheren Eigenwerts gehen sie von zwei Anfangsvektoren \mathfrak{z}_0 und \mathfrak{z}_1 aus, die hinreichend oft iteriert und dann linear kombiniert werden. Mit welchen Schwierigkeiten bei der numerischen Durchführung man zu rechnen hat, ersieht man aus dem von den Verfassern vorgeführten einfachen Beispiel einer dreireihigen Matrix: Um den zweiten Eigenwert auf drei Dezimalen genau zu bestimmen, müssen sie zweireihige Determinanten aus zwanzigstelligen Zahlen bilden, von denen sie jeweils 16 richtige Stellen berücksichtigen. Seit der Arbeit von von Mises und Pollaczek-Geiringer sind wiederholt Untersuchungen über das gleiche Problem durchgeführt worden. In England haben W. J. Duncan und A. R. Collar⁵⁾ Schwingungsprobleme mit Hilfe von Matrizen gelöst. Ihr lineares Gleichungssystem ist vom Typ $\mathfrak{A} \mathfrak{x} = \lambda \mathfrak{x}$. Sie bestimmen zunächst durch Iteration eines beliebigen Anfangsvektors \mathfrak{z} den absolut größten Eigenwert λ_1 (Maximalwurzel) und den zugehörigen Eigenvektor \mathfrak{x}_1 . Mit Hilfe von \mathfrak{x}_1 bilden sie aus \mathfrak{A} eine neue Matrix \mathfrak{A}_1 , deren Maximalwurzel mit dem absolut zweitgrößten Eigenwert λ_2 von \mathfrak{A} übereinstimmt. Später untersucht A. C. Aitken⁶⁾ den Fall einer beliebigen, nicht mehr notwendig symmetrischen, reellen Matrix \mathfrak{A} , insbesondere die Fälle von mehrfachen reellen und komplexen Eigenwerten mit linearen und nichtlinearen Elementarteilern. Er gibt Formeln zur Berechnung von $\lambda_1, \lambda_1 \lambda_2,$

¹⁾ L. Vianello, Graphische Untersuchung der Knickfestigkeit gerader Stäbe. Z. d. VDI, Bd. 42 (1898), S. 1436.

²⁾ J. J. Koch, Bestimmung höherer kritischer Drehzahlen schnellaufender Wellen. Verh. d. 2. int. Kongr. f. techn. Mech. Zürich (1926), S. 213. — Eenige toepassingen van de leer der eigenfuncties op vraagstukken mit de toegepaste mechanika. Diss. Delft (1929).

³⁾ F. H. van den Dungen, Les Problèmes généraux de la technique des vibrations. Mém. d. sciences phys. Bd. 4 (1928). — Über die Biegeschwingungen einer Welle. Z. angew. Math. Mech. Bd. 8 (1928), S. 225.

⁴⁾ R. von Mises und H. Pollaczek-Geiringer, Praktische Verfahren der Gleichungsauflösung II. Z. angew. Math. Mech. Bd. 9 (1929), S. 152.

⁵⁾ W. J. Duncan und A. R. Collar, A method for the solution of oscillation problems by matrices. Phil. Mag. Ser. 7, Bd. 17 (1934), S. 865. — R. A. Frazer, W. J. Duncan, A. R. Collar, Elementary Matrices. Cambridge (1938), S. 143.

⁶⁾ A. C. Aitken, Studies in practical mathematics II. Proc. Roy. Soc. Edinb. Bd. 57 (1937), S. 269.

$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ usw. an. In der letzten Zeit haben sich N. J. Lehmann⁷⁾ und W. Schmeidler⁸⁾ mit der Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren durch Iteration befaßt. Lehmann schließt sich an die Untersuchung von von Mises und Pollaczek-Geiringer über die Bestimmung des absolut kleinsten und zweitkleinsten Eigenwertes von reellen, symmetrischen Matrizen an. Sein Verfahren für die höheren Eigenwerte ist eine Ausnutzung des Ritzschen Gedankens. Schmeidler bestimmt für Hermitesche Matrizen den größten Eigenwert und den zugehörigen Eigenvektor durch Iteration eines beliebigen Anfangsvektors und den nächsten Eigenwert ähnlich wie Duncan und Collar durch Abspalten; außerdem gibt er eine Fehlerabschätzung für den größten Eigenwert an.

Es gibt Schwingungsprobleme, die sich unmittelbar in der Form $\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \lambda\mathfrak{x}$ darbieten, z. B. die Berechnung der Eigenfrequenzen von Torsionsschwingungen. Die Iterationsverfahren liefern hierfür nur die größten Eigenwerte. Praktisch interessieren jedoch nur die kleinsten Eigenwerte. Durch Reziprokbildung der Matrix \mathfrak{A} könnte man auf das System $\mathfrak{x} = \lambda\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{x}$ übergehen und hierfür die kleinsten Eigenwerte bestimmen. Die Bildung einer Reziprokmatrix hoher Ordnung ist aber immer mit umständlicher Rechenarbeit verbunden. Es wird im folgenden unter anderem gezeigt, wie man auch für Systeme des Typs $\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \lambda\mathfrak{x}$ durch zweimalige Berechnung einer Maximalwurzel zur Minimalwurzel gelangen kann, ohne daß man reziproke Matrizen bilden muß.

2. Berechnung der Maximalwurzel und des zugehörigen Eigenvektors

Es sei \mathfrak{A} eine beliebige reelle Matrix n -ter Ordnung. Ihre Eigenwerte genügen der charakteristischen Gleichung $|\lambda\mathfrak{E} - \mathfrak{A}| = 0$. Zu jedem einfachen Eigenwert λ_i gibt es einen linear unabhängigen Eigenvektor \mathfrak{x}_i (vom Spaltentypus) als Lösung des linearen Gleichungssystems $\mathfrak{A}\mathfrak{x}_i = \lambda_i \mathfrak{x}_i$, und einen linear unabhängigen Eigenvektor \mathfrak{y}_i (vom Zeilentypus) als Lösung des linearen Gleichungssystems $\mathfrak{y}_i\mathfrak{A} = \lambda_i \mathfrak{y}_i$. Im Falle einer symmetrischen Matrix \mathfrak{A} ist $\mathfrak{x}_i = \mathfrak{y}_i$. Die Eigenvektoren \mathfrak{x}_i und \mathfrak{y}_i kann man aus der adjungierten Matrix $\mathfrak{A}^*(\lambda_i)$ von $\mathfrak{A}(\lambda_i) = \lambda_i\mathfrak{E} - \mathfrak{A}$ erhalten. Diese Adjungierte $\mathfrak{A}^*(\lambda_i)$ ist eine singuläre Matrix vom Rang 1 mit proportionalen Reihen und läßt sich stets als Produkt $\mathfrak{A}^*(\lambda_i) = \mathfrak{E}_i\mathfrak{Z}_i$ aus einer Spalten- und einer Zeilenmatrix darstellen. Es ist $\mathfrak{x}_i = t\mathfrak{E}_i$ und $\mathfrak{y}_i = \tau\mathfrak{Z}_i$. Die Proportionalitätsfaktoren t und τ können noch so bestimmt werden, daß \mathfrak{x}_i und \mathfrak{y}_i der Normierungsvorschrift $\mathfrak{y}_i\mathfrak{x}_i = 1$ genügen. Gehören die Eigenvektoren \mathfrak{x}_k und \mathfrak{y}_i zu verschiedenen Eigenwerten, so gilt die Orthogonalitätsrelation $\mathfrak{y}_i\mathfrak{x}_k = 0$ ($i \neq k$). Hat \mathfrak{A} lauter einfache Eigenwerte, so gibt es n linear unabhängige Eigenvektoren \mathfrak{x}_i bzw. \mathfrak{y}_i . Jeder Vektor \mathfrak{z} mit n Komponenten läßt sich nach den linear unabhängigen Eigenvektoren von \mathfrak{A} entwickeln. Ist z. B. \mathfrak{z} ein Vektor vom Spaltentypus, so läßt sich \mathfrak{z} in der Form

$$\mathfrak{z} = a_1 \mathfrak{x}_1 + a_2 \mathfrak{x}_2 + \dots + a_n \mathfrak{x}_n \quad (1)$$

mit skalaren Komponenten a_i darstellen, die sich unmittelbar aus $\mathfrak{y}_i \mathfrak{z} = a_i \mathfrak{y}_i \mathfrak{x}_i = a_i$ ergeben.

Man nennt den Eigenwert mit größtem absolutem Betrag die Maximalwurzel von \mathfrak{A} ; sie braucht nicht unbedingt die algebraisch größte charakteristische Wurzel von \mathfrak{A} zu sein. Hat die reelle Matrix \mathfrak{A} nur positive Elemente, so hat sie einen reellen, positiven, einfachen Eigenwert λ_1 von absolut größerem Betrag als irgendein anderer Eigenwert von \mathfrak{A} ⁹⁾. Hier ist also die Maximalwurzel selbst positiv. Wir wollen von unserer Matrix \mathfrak{A} annehmen, daß ihre Maximalwurzel einfach sei und daß es auch keine zwei verschiedene Maximalwurzeln mit gleichem absolutem Betrag gebe. Es sei also

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n| \quad (2)$$

Zunächst soll die Maximalwurzel λ_1 berechnet werden. Zu diesem Zweck multipliziere man \mathfrak{A} rechts mit einem beliebigen reellen Vektor (Spaltenmatrix) $\mathfrak{z} \neq 0$, der nur nicht zu $\mathfrak{A}\mathfrak{z}$ proportional sein soll. Dann bilde man nacheinander die Folge der Vektoren $\mathfrak{A}\mathfrak{z}$, $\mathfrak{A}(\mathfrak{A}\mathfrak{z}) = \mathfrak{A}^2\mathfrak{z}$, ..., allgemein $\mathfrak{A}(\mathfrak{A}^m\mathfrak{z}) = \mathfrak{A}^{m+1}\mathfrak{z}$, ..., indem man \mathfrak{A} jedesmal rechts mit einem neuen Vektor multipliziert. Dividiert man dann zwei entsprechend gelegene Elemente von $\mathfrak{A}^{m+1}\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{A}^m\mathfrak{z}$, so konvergiert für $m \rightarrow \infty$ die Folge dieser Quotienten gegen die Maximalwurzel λ_1 . Denn aus (1) folgt

$$\mathfrak{A}^m\mathfrak{z} = a_1 \lambda_1^m \mathfrak{x}_1 + a_2 \lambda_2^m \mathfrak{x}_2 + \dots + a_n \lambda_n^m \mathfrak{x}_n.$$

Für irgendein Element des Vektors $\mathfrak{A}^m\mathfrak{z}$, etwa für die i -te Komponente, hat man dann

$$f_1(m) = c_1 \lambda_1^m + c_2 \lambda_2^m + \dots + c_n \lambda_n^m \quad \text{mit} \quad c_j = a_j \mathfrak{y}_i \mathfrak{x}_j \quad (3)$$

⁷⁾ N. J. Lehmann, Eingrenzung der Eigenwerte und Berechnung der Eigenvektoren homogener linearer Gleichungssysteme durch Iteration. Dresden (1947). Nicht veröffentlicht. Manuskript beim Lehrstuhl für angewandte Mathematik der Technischen Hochschule Dresden.

⁸⁾ W. Schmeidler, Vorträge über Determinanten und Matrizen. Berlin (1949), S. 99.

⁹⁾ O. Perron, Zur Theorie der Matrizen. Math. Ann. Bd. 64 (1907), S. 248. und G. Frobenius, Über Matrizen aus positiven Elementen. Sitz.-Ber. d. preuß. Akad. d. Wiss. (1908), S. 471.

und als Quotient entsprechender Elemente von \mathfrak{A}^{m+1}_3 und \mathfrak{A}^m_3 entsteht so, falls¹⁰⁾ $c_1 \neq 0$,

$$\Phi_1(m) = \frac{f_1(m+1)}{f_1(m)} = \lambda_1 + \frac{c_2}{c_1} (\lambda_2 - \lambda_1) \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^m + O\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^m + O\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{2m} \dots \dots (4).$$

Aus (4) folgt wegen (2) $\lim_{m \rightarrow \infty} \Phi_1(m) = \lambda_1$.

Bei der Auswahl der Vektorkomponenten hat man noch Freiheit. Man kann auch eine Mittelbildung vornehmen oder innere Produkte aufeinanderfolgender Vektoren bilden. Ist \mathfrak{A} symmetrisch, so entsteht durch Multiplikation der Zeilenmatrix $(\mathfrak{A}^p_3)'$ mit der Spaltenmatrix \mathfrak{A}^m_3 (inneres Produkt des Vektors \mathfrak{A}^p_3 mit \mathfrak{A}^m_3), der Skalar

$$(\mathfrak{A}^p_3)' \mathfrak{A}^m_3 = \mathfrak{A}^p \mathfrak{A}^m = \mathfrak{A}^{p+m} = s_1(p+m)$$

insbesondere für $p = m$

$$(\mathfrak{A}^m_3)' \mathfrak{A}^m_3 = |\mathfrak{A}^m_3|^2 = s_1(2m) \dots \dots \dots (5)$$

Die Quotienten

$$\Sigma_1(2m) = \frac{s_1(2m+1)}{s_1(2m)}, \quad \Sigma_1(2m+1) = \frac{s_1(2m+2)}{s_1(2m+1)} \dots \dots \dots (6)$$

konvergieren gegen λ_1 . Mit Verwendung der inneren Produkte aus gleichen oder benachbarten Vektoren der Vektorfolge \mathfrak{A}^m_3 ergeben sich also bei einer symmetrischen Matrix \mathfrak{A} nach m Iterationsschritten Skalare $s_1(2m-1)$ bzw. $s_1(2m)$, während sonst nach m Schritten nur Skalare der Ordnung m zur Verfügung stehen, z. B. (3). Man braucht bei der Aufstellung der Vektorfolge für eine symmetrische Matrix \mathfrak{A} nur halb so weit zu gehen wie bei einer unsymmetrischen Matrix, um die gleiche Güte der Näherung zu erzielen.

Wie man aus (4) erkennt, wird die Folge $\Phi_1(m)$ um so rascher gegen λ_1 konvergieren, je stärker $\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|$ unter 1 bleibt¹¹⁾. Man kann auch in den Fällen, wo das Verhältnis $\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|$ ungünstig ausfällt, die Konvergenz gegen λ_1 dadurch beschleunigen, daß man aus der Folge $\Phi_1(m)$ die neue Folge

$$\varphi_1(m) = \frac{D\Phi_1(m)}{\Delta^2\Phi_1(m)} \quad \text{mit} \quad D\Phi_1(m) = \begin{vmatrix} \Phi_1(m+1) & \Phi_1(m) \\ \Phi_1(m) & \Phi_1(m-1) \end{vmatrix} \dots \dots \dots (7)$$

und

$$\Delta^3\Phi_1(m) = \Phi_1(m+1) - 2\Phi_1(m) + \Phi_1(m-1)$$

bildet. Wegen (4) ist

$$\varphi_1(m) = \lambda_1 + O\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^m + O\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{2m}.$$

Der Fehler, den man begeht, wenn man von einer Nummer m_0 an $\varphi_1(m) = \lambda_1$ setzt, ist also nur noch von der Ordnung $\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^m$ bzw. $\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^{2m}$, je nachdem, welcher Wert der größere ist, während der

Fehler bei Benützung der Folge $\Phi_1(m)$ von der Ordnung $\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^m$ war. Die Verbesserung kann beträchtlich sein. Aus der Folge (6) kann man in gleicher Weise eine rascher gegen λ_1 konvergierende Folge

$$\sigma_1(m) = \frac{D\Sigma_1(m)}{\Delta^2\Sigma_1(m)} \dots \dots \dots (8)$$

bilden.

Im Falle einer positiv definiten symmetrischen Matrix \mathfrak{A} ist die Folge $\Sigma_1(m)$ monoton steigend, ihre Elemente sind untere Schranken für den größten Eigenwert λ_1 . Ist die symmetrische Matrix \mathfrak{A} nicht positiv definit, so sind die Quotienten $\frac{s_1(2m+2)}{s_1(2m)}$ untere Schranken für λ_1^2 . Nach oben gilt die Abschätzung

$$\lambda_1^2 \leq \frac{s_1(2m+2)}{s_1(2m)} + \frac{F(m)}{2}$$

¹⁰⁾ Wenn zufällig $c_1 = c_2 = \dots = c_{k-1} = 0, c_k \neq 0$ ist, konvergiert die Folge $\Phi_1(m)$ gegen den Eigenwert λ_k .

¹¹⁾ In dem Beispiel von Schmidler, a. a. O., das er dem Bericht von v. Mises und Pollaczek-Geiringer entnommen hat, ist dieses Verhältnis gleich 0,064, also für eine rasche Konvergenz außerordentlich günstig.

mit

$$F(m) = \frac{\frac{s_1(2m+2)}{s_1(2m)} - \frac{s_1(2m)}{s_1(2m-2)}}{\frac{s_1(2m)}{s_1(2m)} - 1} \quad \text{und} \quad k = \sum_{i,k=1}^n a_{ik}^2 \dots \dots \dots (9)$$

Also hat man die Näherung¹²⁾

$$\lambda_1^2 \approx \frac{s_1(2m+2)}{s_1(2m)} + \frac{F(m)}{2} \dots \dots \dots (10)$$

mit einem Fehler, der höchstens $\pm \frac{1}{2} \cdot F(m)$ ist.

Will man zum Eigenwert λ_1 auch noch den zugehörigen Eigenvektor \mathfrak{x}_1 bestimmen, so kann man dazu die Vektoren der Folge \mathfrak{M}_3^m verwenden, die gegen \mathfrak{x}_1 konvergieren. Für die praktische Rechnung wirkt sich jedoch nachteilig aus, daß man bei fortwährendem Iterieren schließlich zu recht großen Komponenten der Vektoren \mathfrak{M}_3^m gelangt. Für die Rechnung bequemer ist es, wenn man nach jedem Schritt die Komponenten ähnlich verkleinert, also die Länge der Vektoren ändert, indem man sie auf eine Standardform bringt, z. B. so, daß stets die 1. Komponente gleich 1 wird. Dann ergibt sich folgender Rechnungsgang:

$$\left. \begin{array}{ll} \mathfrak{M}_3 = \mathfrak{p}_1 = (p_{i1}); & \mathfrak{z}_1 = \frac{p_1}{p_{11}} = \frac{\mathfrak{M}_3}{p_{11}}; \\ \mathfrak{M}_{\mathfrak{z}_1} = \mathfrak{p}_2 = (p_{i2}); & \mathfrak{z}_2 = \frac{p_2}{p_{12}} = \frac{\mathfrak{M}_3^2}{p_{12} p_{11}}; \\ \dots & \dots \\ \mathfrak{M}_{\mathfrak{z}_m} = \mathfrak{p}_{m+1} = (p_{i,m+1}); & \mathfrak{z}_{m+1} = \frac{p_{m+1}}{p_{1,m+1}} = \frac{\mathfrak{M}^{m+1}}{\prod_{j=1}^{m+1} p_{1j}} \end{array} \right\} \dots \dots \dots (11).$$

Die Folge der Skalare $p_{1,m}$ konvergiert gegen die Maximalwurzel λ_1 und die Folge der Vektoren \mathfrak{z}_m gegen den zugehörigen Eigenvektor \mathfrak{x}_1 mit der 1. Komponente 1. Für die praktische Durchführung wird das so aussehen: wenn sich zwei aufeinanderfolgende Vektoren \mathfrak{z}_m und \mathfrak{z}_{m+1} innerhalb der durch die Rechenmaschine erreichbaren Genauigkeit nicht mehr unterscheiden, ist die Iteration abzubrechen. Man hat dann $\mathfrak{M}_{\mathfrak{z}_m} = \mathfrak{p}_{1,m+1} \mathfrak{z}_{m+1}$ mit praktisch gleichen Vektoren \mathfrak{z}_m und \mathfrak{z}_{m+1} , so daß $p_{1,m+1}$ für den Eigenwert λ_1 und $\mathfrak{z}_m \approx \mathfrak{z}_{m+1}$ für den zugehörigen Eigenvektor \mathfrak{x}_1 praktisch erreichbare Näherungen darstellen.

3. Berechnung der Minimalwurzel

Wenn man eine einzelne Matrix rationalen Operationen unterwirft, so machen ihre Eigenwerte entsprechende Operationen mit. So hat z. B. die reziproke Matrix \mathfrak{A}^{-1} die Eigenwerte λ_1^{-1} , λ_2^{-1} , ..., λ_n^{-1} , wenn λ_1 , λ_2 , ..., λ_n die Eigenwerte der nichtsingulären Matrix \mathfrak{A} sind. Für mehrere Matrizen hat G. Frobenius¹³⁾ einen entsprechenden sehr allgemeinen Satz aufgestellt: Es seien \mathfrak{X} , \mathfrak{Y} , \mathfrak{Z} , ... vertauschbare Matrizen n -ter Ordnung. $f(x, y, z, \dots)$ sei eine rationale skalare Funktion. Dann bilde man die Matrix $\mathfrak{R} = f(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, \dots)$. Bezeichnet man die Eigenwerte von \mathfrak{X} mit x_i , die von \mathfrak{Y} mit y_i , die von \mathfrak{Z} mit z_i , ..., während die Eigenwerte von \mathfrak{R} mit ϱ_i ($i = 1, \dots, n$) bezeichnet werden mögen, so kann man die Eigenwerte x_i, y_i, z_i, \dots so ordnen, daß sich die Eigenwerte ϱ_i von \mathfrak{R} durch $\varrho_i = f(x_i, y_i, z_i, \dots)$ ($i = 1, \dots, n$) darstellen lassen.

Dieser Satz erlaubt eine für unsere Zwecke nützliche Anwendung. Die Matrix \mathfrak{X} habe lauter reelle Eigenwerte x_1, \dots, x_n . Mit einem von ihnen, z. B. mit x_i , bilde man die Skalarmatrix $\mathfrak{Y} = x_i \mathfrak{E}$, die mit jeder Matrix gleicher Ordnung vertauschbar ist. Nach der rationalen Vorschrift $f(x, y) = y - x$ stelle man die neue Matrix $\mathfrak{R} = \mathfrak{Y} - \mathfrak{X} = x_i \mathfrak{E} - \mathfrak{X}$ her. Dann sind $\varrho_1 = x_i - x_1, \dots, \varrho_n = x_i - x_n$ die Eigenwerte von \mathfrak{R} . Sind $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n$ die Eigenwerte von \mathfrak{A} , so sind $\varrho_1 = 0, \varrho_2 = \lambda_1 - \lambda_2, \dots, \varrho_n = \lambda_1 - \lambda_n$ die Eigenwerte von $\mathfrak{R} = \lambda_1 \mathfrak{E} - \mathfrak{A}$. Dabei ist $\varrho_n > \varrho_{n-1} > \dots > \varrho_1 = 0$. λ_1 ist die Maximalwurzel von \mathfrak{A} , ϱ_n ist die Maximalwurzel von \mathfrak{R} . Mit Hilfe dieser beiden Maximalwurzeln erhält man die Minimalwurzel λ_n von \mathfrak{A} zu $\lambda_n = \lambda_1 - \varrho_n$. Interessieren also z. B. die beiden kleinsten Eigenwerte von \mathfrak{A} , so

¹²⁾ Für den größten Eigenwert des Eigenwertproblems $\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \lambda\mathfrak{x}$ bei Schmeidler, a. a. O. S. 103 in Anlehnung an eine Darstellung von L. Collatz über Integralgleichungen; für sämtliche Eigenwerte des Eigenwertproblems $\mathfrak{x} = \lambda \mathfrak{A} \mathfrak{x}$ bei Lehmann, a. a. O., S. 21.

¹³⁾ G. Frobenius, Über vertauschbare Matrizen. S.-B. preuß. Akad. Wiss. (1896) I, S. 601.

berechne man zunächst den größten Eigenwert λ_1 von \mathfrak{A} und hernach die beiden größten Eigenwerte ϱ_n und ϱ_{n-1} von \mathfrak{B} . Die gesuchten zwei kleinsten Eigenwerte von \mathfrak{A} sind dann

$$\begin{aligned}\lambda_n &= \lambda_1 - \varrho_n \\ \lambda_{n-1} &= \lambda_1 - \varrho_{n-1}\end{aligned}\quad (12).$$

4. Berechnung der nächsthöheren Eigenwerte

\mathfrak{A} sei eine Matrix mit lauter reellen und verschiedenen Eigenwerten $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n|$. Die Maximalwurzel λ_1 sei bereits berechnet. Gesucht werde jetzt der nächsthöhere Eigenwert λ_2 . Bildet man aus der Folge (3) die neue Folge

$$f_2(m) = \begin{vmatrix} f_1(m+1) & f_1(m) \\ f_1(m) & f_1(m-1) \end{vmatrix} \quad (13),$$

so streben die Quotienten

$$\Phi_2(m) = \frac{f_2(m+1)}{f_2(m)} = \lambda_1 \lambda_2 + \frac{c_3}{c_2} \frac{(\lambda_1 - \lambda_3)^2}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2} (\lambda_1 \lambda_3 - \lambda_1 \lambda_2) \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_2}\right)^{m-1} + O\left(\frac{\lambda_4}{\lambda_2}\right)^{m-1} + O\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_2}\right)^{2m-2},$$

alls $c_2 \neq 0$ ist, für $m \rightarrow \infty$ gegen $\lambda_1 \lambda_2$. Die Konvergenz gegen $\lambda_1 \lambda_2$ kann man noch beschleunigen, wenn man zur Folge

$$\varphi_2(m) = \frac{D\Phi_2(m)}{\Delta^2\Phi_2(m)} \quad \text{mit} \quad D\Phi_2(m) = \begin{vmatrix} \Phi_2(m+1) & \Phi_2(m) \\ \Phi_2(m) & \Phi_2(m-1) \end{vmatrix}$$

und

$$\Delta^2\Phi_2(m) = \Phi_2(m+1) - 2\Phi_2(m) + \Phi_2(m-1)$$

übergeht. Es ist

$$\varphi_2(m) = \lambda_1 \lambda_2 + O\left(\frac{\lambda_4}{\lambda_2}\right)^{m-1} + O\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_2}\right)^{2m-2}.$$

Der Fehler, den man begeht, wenn man von einer Nummer m_0 an $\varphi_2(m) = \lambda_1 \lambda_2$ setzt, ist also nur noch von der Ordnung $\left|\frac{\lambda_4}{\lambda_2}\right|^{m-1}$ bzw. $\left|\frac{\lambda_3}{\lambda_2}\right|^{2m-2}$, je nachdem, welcher Wert der größere ist, während der Fehler bei Benützung der Folge $\Phi_2(m)$ von der Ordnung $\left|\frac{\lambda_3}{\lambda_2}\right|^{m-1}$ war. Trotzdem ist dieses Verfahren zur Berechnung des absolut zweitgrößten Eigenwertes nicht zu empfehlen. Bei der praktischen Durchführung der Rechnung treten Schwierigkeiten auf. Nach (13) ist

$$f_2(m) = f_1(m-1)f_1(m) \left[\frac{f_1(m+1)}{f_1(m)} - \frac{f_1(m)}{f_1(m-1)} \right].$$

Nach (1) gehen sowohl $\frac{f_1(m+1)}{f_1(m)}$ wie $\frac{f_1(m)}{f_1(m-1)}$ mit wachsendem m gegen λ_1 , so daß für $f_2(m)$ die Differenz von zwei wenig verschiedenen Zahlen zu bilden ist, was bei sehr großen Zahlen stets zu einem Verlust von wertvollen Ziffern führt. Größte Rechengenauigkeit ist erforderlich, um auch nur einige Stellen von λ_2 zu sichern. Kleine Rechenmaschinen reichen dazu nicht aus.

Brauchbarer ist folgendes Verfahren: Die Maximalwurzel λ_1 und der zugehörige Eigenvektor \mathfrak{x}_1 seien nach (11) hinreichend genau bestimmt. Dann bilde man die neue Matrix

$$\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A} - \mathfrak{x}_1 (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}) \quad (14).$$

Mit Ausnahme von λ_1 hat \mathfrak{A}_1 die gleichen Eigenwerte $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ wie die ursprüngliche Matrix \mathfrak{A} . In der 1. Zeile von \mathfrak{A}_1 stehen lauter Nullen. Deshalb ist Null ein Eigenwert von \mathfrak{A}_1 . Er ist an die Stelle des Eigenwerts λ_1 von \mathfrak{A} getreten. Der nach λ_1 nächste Eigenwert λ_2 von \mathfrak{A} kann deshalb auf gleiche Weise wie λ_1 als Maximalwurzel der Matrix \mathfrak{A}_1 bestimmt werden. Man kann so λ_2 mit erträglichem Rechenaufwand sehr genau ermitteln. Nur ist dazu erforderlich, daß \mathfrak{x}_1 genügend genau bestimmt ist. Von der Güte von \mathfrak{x}_1 kann man sich dadurch überzeugen, daß man $\mathfrak{A}\mathfrak{x}_1$ mit $\lambda_1 \mathfrak{x}_1$ vergleicht.

Wäre \mathfrak{x}_1 genau bekannt, so könnte man den zweiten Eigenwert λ_2 und den zugehörigen Eigenvektor \mathfrak{x}_2 einfach wie folgt bestimmen: \mathfrak{v} sei ein beliebiger Anfangsvektor. Seine Komponente in \mathfrak{x}_1 -Richtung ist $\frac{\mathfrak{v}' \mathfrak{x}_1}{\mathfrak{x}_1' \mathfrak{x}_1} \mathfrak{x}_1$. Der neue Vektor

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{v} - \frac{\mathfrak{v}' \mathfrak{x}_1}{\mathfrak{x}_1' \mathfrak{x}_1} \mathfrak{x}_1$$

hat dann keine Komponente in \mathfrak{x}_1 -Richtung mehr, ist also zu \mathfrak{x}_1 orthogonal, d. h. $\mathfrak{x}_1' \mathfrak{B} = 0$. Entwickelt man jetzt \mathfrak{B} nach den Eigenlösungen von \mathfrak{A} , so wird

$$\mathfrak{B} = a_2 \mathfrak{x}_2 + \dots + a_n \mathfrak{x}_n$$

und damit

$$\mathfrak{A}^m \mathfrak{B} = a_2 \lambda_2^m \mathfrak{x}_2 + \cdots + a_n \lambda_n^m \mathfrak{x}_n.$$

Irgend eine Komponente von $\mathfrak{A}^m \mathfrak{B}$ sei

$$g_2(m) = c_2 \mathfrak{x}_2^m + \cdots + c_n \lambda_n^m.$$

Der Quotient entsprechender Komponenten von aufeinanderfolgenden Vektoren $\mathfrak{A}^{m+1} \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}^m \mathfrak{B}$ wird dann

$$\chi_2(m) = \frac{g_2(m+1)}{g_2(m)}$$

und strebt, falls $c_2 \neq 0$, für $m \rightarrow \infty$ gegen λ_2 . Die Vektoren der Folge $\mathfrak{A}^m \mathfrak{B}$ streben gegen \mathfrak{x}_2 .

Ist \mathfrak{A} symmetrisch, so empfiehlt sich wieder die Bildung innerer Produkte

$$(\mathfrak{A}^p \mathfrak{B})' \mathfrak{A}^m \mathfrak{B} = \mathfrak{B}' \mathfrak{A}^{p+m} \mathfrak{B} = s_2(p+m)$$

insbesondere für $p = m$

$$|\mathfrak{A}^m \mathfrak{B}|^2 = s_2(2m).$$

Die Quotienten

$$\Sigma_2(2m) = \frac{s_2(2m+1)}{s_2(2m)}, \quad \Sigma_2(2m+1) = \frac{s_2(2m+2)}{s_2(2m+1)}, \dots$$

konvergieren gegen λ_2 .

Nun ist aber \mathfrak{x}_1 leider nicht exakt bekannt, sondern nur näherungsweise, etwa in Gestalt des Vektors $\mathfrak{A}^m \mathfrak{z}$ von Nr. 2. Deshalb kann man den Ausgangsvektor \mathfrak{B} nie so wählen, daß seine Komponente in \mathfrak{x}_1 -Richtung exakt verschwindet. Bei der Iteration $\mathfrak{A}^m \mathfrak{B}$ wird sich die nicht ganz getilgte Restkomponente in \mathfrak{x}_1 -Richtung wieder auswirken. Das Kochsche Verfahren sieht deshalb vor, nach jedem Iterationsschritt erneut die noch verbliebene Komponente in \mathfrak{x}_1 -Richtung zu beseitigen.

Die beste Näherung für \mathfrak{x}_1 in der Vektorfolge $\mathfrak{A}^m \mathfrak{z}$ werde jetzt der Kürze halber einfach mit \mathfrak{z}_1 bezeichnet. \mathfrak{v}_0 sei ein beliebiger Anfangsvektor. Wir nehmen ihm seine \mathfrak{z}_1 -Komponente und schreiben

$$\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{v}_0 - \frac{\mathfrak{v}_0' \mathfrak{z}_1}{\mathfrak{z}_1' \mathfrak{z}_1} \mathfrak{z}_1.$$

Der erste iterierte Vektor sei $\mathfrak{v}_1 = \mathfrak{A} \mathfrak{B}_0$. Subtrahiert man von ihm seine \mathfrak{z}_1 -Komponente, so entsteht

$$\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{v}_1 - \frac{\mathfrak{v}_1' \mathfrak{z}_1}{\mathfrak{z}_1' \mathfrak{z}_1} \mathfrak{z}_1,$$

mit dem man nun wieder einen Iterationsschritt $\mathfrak{v}_2 = \mathfrak{A} \mathfrak{B}_1$ ausführen kann, usw. Allgemein wird

$$\mathfrak{B}_m = \mathfrak{v}_m - \frac{\mathfrak{v}_m' \mathfrak{z}_1}{\mathfrak{z}_1' \mathfrak{z}_1} \mathfrak{z}_1 \quad \text{und} \quad \mathfrak{v}_{m+1} = \mathfrak{A} \mathfrak{B}_m \dots \dots \dots (15).$$

Im Verlauf der Rechnung wird sich nach einigen Schritten zeigen, daß der Anteil $\frac{\mathfrak{v}_m' \mathfrak{z}_1}{\mathfrak{z}_1' \mathfrak{z}_1} \mathfrak{z}_1$ keinen wesentlichen Einfluß mehr hat. Dann ist $\mathfrak{B}_m \approx \mathfrak{v}_m$. Von da an kann man iterieren, ohne nach jedem Schritt die „Reinigung“ vornehmen zu müssen. Schließlich bilde man, falls \mathfrak{A} symmetrisch ist, die inneren Produkte

$$\mathfrak{B}_m' \mathfrak{B}_m = t(2m), \quad \mathfrak{B}_m' \mathfrak{B}_{m+1} = t(2m+1) \dots \dots \dots (16).$$

Die Quotienten

$$T(2m) = \frac{t(2m+1)}{t(2m)}, \quad T(2m+1) = \frac{t(2m+2)}{t(2m+1)} \dots \dots \dots (17),$$

konvergieren gegen λ_2 . Noch rascher konvergiert die Folge

$$\tau_m = \frac{DT(m)}{A^2 T(m)} \dots \dots \dots (18)$$

gegen λ_2 .

5. Beispiel¹⁴⁾

Die Bestimmung der Drehschwingungszahlen einer mit fünf Massen arbeitenden Kolbenmaschine führt auf folgende Frequenzmatrix

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0,866025 & 0 & 0 \\ 0,866025 & 3 & 1,095445 & 0 \\ 0 & 1,095445 & 1 & 0,447214 \\ 0 & 0 & 0,447214 & 2 \end{pmatrix}$$

¹⁴⁾ Bei der numerischen Durchführung des Beispiels hat mir Herr Dipl.-Ing. K. E. H a f n e r geholfen, wofür ich ihm auch an dieser Stelle meinen herzlichen Dank aussprechen möchte.

\mathfrak{A} ist symmetrisch und positiv definit. Mit dem Anfangsvektor $\mathfrak{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ erhält man beim 6., 7. und 8. Iterationsschritt die Vektoren

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{A}^6 \mathfrak{z} & \mathfrak{A}^7 \mathfrak{z} & \mathfrak{A}^8 \mathfrak{z} \\ \begin{pmatrix} 1218,3373 \\ 3862,1908 \\ 1639,3086 \\ 493,32488 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4563,0911 \\ 14437,455 \\ 6090,7480 \\ 1719,7715 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 17066,288 \\ 53936,195 \\ 22675,292 \\ 6163,411 \end{pmatrix} \end{array}$$

Nach (5) bilde man ¹⁵⁾

$$\begin{array}{ll} s_1(12) = |\mathfrak{A}^6 \mathfrak{z}|^2 = 19331566 & ; \quad \frac{s_1(14)}{s_1(12)} = 13,931449 \\ s_1(14) = |\mathfrak{A}^7 \mathfrak{z}|^2 = 26931673 & (^9); \quad \frac{s_1(16)}{s_1(14)} = 13,933512 \\ s_1(16) = |\mathfrak{A}^8 \mathfrak{z}|^2 = 37525278 & (^{10}); \end{array}$$

Damit wird nach (9) und (10)

$$\lambda_1^2 \approx \frac{s_1(16)}{s_1(14)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{s_1(16)}{s_1(14)} - \frac{s_1(14)}{s_1(12)}}{\frac{s_1(14)}{s_1(12)} - 1} = 13,933512 + 0,000646$$

mit einem Fehler, der höchstens gleich 0,000646 ist. Also ist mit drei Stellen genau $\lambda_1^2 = 13,934$ und $\lambda_1 = 3,733$.

Genauere Werte erhält man, wenn man die Folge (6) benützt und das Verfahren (8) zur Beschleunigung der Konvergenz anwendet. (Siehe Tafel I.)

Tafel I

m	$s_1(m)$	$\Sigma_1(m)$	$\Delta^1 \Sigma_1$	$\Delta^2 \Sigma_1$	$D\Sigma_1$	$\frac{D\Sigma_1}{\Delta^2 \Sigma_1}$	$\sigma_1(m)$
12	19331566	3,732 373					
13	72152612		225				
		598	(0,569)	97	86806	895	3,732 895
14	26931673 (⁹)	726	128				
		798	(0,563)	56	49872	891	891
15	10052856 (¹⁰)		72				
16	37525278 (¹⁰)						

Also ist mit 5 Stellen genau $\lambda_1 = 3,73289$. (Der genaue Wert ist 3,7328913.)

Das Verhältnis der ersten Differenzen $\Delta^1 \Sigma_1$ in Tafel I ist 0,569 bzw. 0,563, also nahezu konstant; es konvergiert gegen $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$. Mit dem mittleren Wert 0,566 erhält man eine Näherung für λ_2 und zwar $\lambda_2 \approx 2,11$.

(Der genaue Wert ist 2,10690, also beträgt der Fehler der durch einfachste Rechnung erhaltenen Näherung weniger als 0,15%.) Für die genauere Bestimmung von λ_2 reicht die Anzahl der Iterationsschritte noch nicht aus. $\mathfrak{A}^6 \mathfrak{z}$, $\mathfrak{A}^7 \mathfrak{z}$, $\mathfrak{A}^8 \mathfrak{z}$ geben einen viel zu ungenauen Wert für den zu λ_1 gehörigen Eigenvektor \mathfrak{r}_1 . Man müßte entweder die Anzahl der Iterationsschritte verdoppeln oder das K o c h s c h e Verfahren anwenden. Wir führen diese 2. Methode vor.

Aus den drei Vektoren

$$\begin{array}{ccc} \lambda_1 \mathfrak{A}^6 \mathfrak{z} & \mathfrak{A}^7 \mathfrak{z} & \lambda_1^{-1} \mathfrak{A}^8 \mathfrak{z} \\ \begin{pmatrix} 4547,9203 \\ 14417,137 \\ 6119,3603 \\ 1841,5280 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4563,0911 \\ 14437,455 \\ 6090,7480 \\ 1719,7715 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4571,8688 \\ 14448,907 \\ 6074,4586 \\ 1651,1092 \end{pmatrix} \end{array}$$

bilde man durch Anwendung des Verfahrens zur Beschleunigung der Konvergenz den Vektor

$$\begin{pmatrix} 4582,6281 \\ 14463,699 \\ 6052,9260 \\ 1562,3140 \end{pmatrix} \text{ oder } 4582,6281 \cdot \mathfrak{z}_1 \text{ mit } \mathfrak{z}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3,156202 \\ 1,320842 \\ 0,340921 \end{pmatrix},$$

der als beste Näherung für \mathfrak{r}_1 genommen werden kann. $\mathfrak{v}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ werde als Ausgangsvektor gewählt. In der

Rechnung wechseln dann nach (15) Beseitigung der \mathfrak{z}_1 -Komponente und Iteration miteinander ab. (Siehe Tafel II.)

¹⁵⁾ Der obere Index (⁹) zeigt an, daß es sich um eine Zahl mit 9 Ziffern handelt, von denen hier nur die 8 ersten angeschrieben wurden.

Tafel II.

v_0	$v_1 = \mathfrak{A}v_0$	$v_2 = \mathfrak{A}v_1$	$v_3 = \mathfrak{A}v_2$
1	0,432070	0,023547	-0,568038
1	-0,384192	-0,683040	-1,349013
1	0,305419	0,620652	1,594295
1	1,869821	3,850392	7,978329
$\frac{v'_0 \delta_1}{\delta'_1 \delta_1}$	$\frac{v'_1 \delta_1}{\delta'_1 \delta_1}$	$\frac{v'_2 \delta_1}{\delta'_1 \delta_1}$	$\frac{v'_3 \delta_1}{\delta'_1 \delta_1}$
0,453732	0,020304	0,000015	-0,0000003
1,432070	0,064085	0,000047	-0,0000009
0,599308	0,026819	0,000020	-0,0000004
0,154687	0,006922	0,000005	-0,0000001
$\mathfrak{B}_0 = v_0 - \frac{v'_0 \delta_1}{\delta'_1 \delta_1}$	$\mathfrak{B}_1 = v_1 - \frac{v'_1 \delta_1}{\delta'_1 \delta_1}$	$\mathfrak{B}_2 = v_2 - \frac{v'_2 \delta_1}{\delta'_1 \delta_1}$	$\mathfrak{B}_3 = v_3 - \frac{v'_3 \delta_1}{\delta'_1 \delta_1}$
0,546268	0,411766	0,023532	-0,568038
-0,432070	-0,448277	-0,683087	-1,349012
0,406692	0,278600	0,620632	1,594295
0,845313	1,862899	3,850387	7,978329

Vom 3. Schritt an ist $\mathfrak{B}_m = v_m$, die δ_1 -Komponente von v_m fällt nicht mehr ins Gewicht. Man kann jetzt nacheinander iterieren. Die nächsten drei Iterationsschritte liefern

\mathfrak{B}_4	\mathfrak{B}_5	\mathfrak{B}_6
-1,736318	-4,154706	-9,216642
-2,792515	-5,845023	-12,281516
3,684545	8,080399	17,324209
16,669649	34,987078	73,587824

Nun kann man entweder eine Komponente herausgreifen und die Quotienten dieser Komponenten in aufeinanderfolgenden Vektoren bilden oder nach (16) die inneren Produkte der \mathfrak{B}_m und ihre Quotienten (17) herstellen und nach (18) diese Quotienten gleich verbessern. (Siehe Tafel III.)

Tafel III.

m	$l(m)$	$T(m)$	$\Delta^1 T$	$\Delta^2 T$	$D T$	$\frac{D T}{\Delta^2 T}$	$\tau(m)$
8	302,2660	2,10 5864					
9	636,5311		575				
		6439	(0,44)	318	2195377	6904	2,10 6904
10	1340,814	6696	257				
			(0,45)	144	993265	6898	6898
11	2824,688	6809	113				
12	5951,078						

Also ist mit 5 Stellen genau $\lambda_2 = 2,10690$. (Der genaue Wert ist 2,106900.) Die Verhältnisse der 1. Differenzen $\Delta^1 T$ halten sich ungefähr bei 0,445. Sie streben gegen $\frac{\lambda_3}{\lambda_2}$. Damit erhält man einen Näherungswert $\lambda_3 \approx 0,937$. (Der genaue Wert ist 0,93609.)

Schließlich wollen wir uns noch für die beiden kleinsten Eigenwerte λ_4 und λ_3 von \mathfrak{A} interessieren. Dies sind die beiden größten Eigenwerte ϱ_4 und ϱ_3 der Matrix $\mathfrak{R} = \lambda_1 \mathfrak{E} - \mathfrak{A}$. Wenn wir mit dem letzten in Tafel I erhaltenen Wert $\lambda_1 = 3,732891$ rechnen, wird

$$\mathfrak{R} = \begin{pmatrix} 2,732891 & 0,866025 & 0 & 0 \\ 0,866025 & 0,732891 & 1,095445 & 0 \\ 0 & 1,095445 & 2,732891 & 0,447214 \\ 0 & 0 & 0,447214 & 1,732891 \end{pmatrix}.$$

Wir wollen mit der Maximalwurzel ϱ_4 von \mathfrak{R} zugleich den zugehörigen Eigenvektor r_4 bestimmen und benutzen diesmal das Verfahren (11). (Siehe Tafel IV.)

Tafel IV.

Vektorfolge \mathfrak{z}_m				Vektorfolge \mathfrak{p}_m			
				p_{1m}	p_{2m}	p_{3m}	p_{4m}
1	1	1	1	3,6	2,7	4,3	2,2
1	0,75	1,19	0,61	3,38	2,72	4,35	1,59
1	0,80	1,29	0,47	3,43	2,87	4,61	1,39
1	0,84	1,34	0,40
.
.	.	.	.	3,508773	3,143550	5,191896	1,307455
1	0,895911	1,479690	0,372625	3,508773	3,143550	5,191896	1,307455

Beim letzten Schritt hat sich keine Komponente mehr verändert. Also ist $\varrho_4 = 3,508773$ der größte Eigenwert

von \mathfrak{N} und $\mathfrak{r}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0,895911 \\ 1,479690 \\ 0,372625 \end{pmatrix}$ der zugehörige Eigenvektor. Mit seiner Hilfe bildet man nach (14) die neue Matrix

$$\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{N} - \mathfrak{r}_4 (2,732891 \quad 0,866025 \quad 0 \quad 0) \\ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1,582403 & -0,042991 & 1,095445 & 0 \\ -4,043831 & -0,186004 & 2,732891 & 0,447214 \\ -1,018343 & -0,322702 & 0,447214 & 1,732891 \end{pmatrix}$$

Jetzt wird genau so der größte Eigenwert von \mathfrak{N}_1 und der zugehörige Eigenvektor bestimmt. Wählt man

als Anfangsvektor $\mathfrak{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, so erhält man als Maximalwurzel $\varrho_3 = 2,796801$ und als Eigenvektor

$$\mathfrak{r}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2,592363 \\ 0,786380 \end{pmatrix}$$

Nach (12) hat man mit ϱ_4 und ϱ_3 zugleich die beiden kleinsten Eigenwerte von \mathfrak{N} , nämlich

$$\lambda_4 = \lambda_1 - \varrho_4 = 0,224118 \\ \lambda_3 = \lambda_1 - \varrho_3 = 0,936090.$$

Eingegangen am 19. 9. 1949.

KLEINE MITTEILUNGEN

Untersuchungen des für den schiefen Stoß elastischer Kugeln gültigen Reflektionsaxioms und einige Folgerungen daraus.

Im Schrifttum findet man den vorsichtigen Hinweis, daß der schiefe Stoß in der Regel neben der translatorischen Reflektionsbewegung nach Stoßbeendigung auch Rotationen der stoßenden Körper auslösen kann. In der Tat muß jedoch solch ein schiefer Stoß eine Änderung der Rotation zur Folge haben, wie stets die Wirklichkeit zeigt und wie im folgenden auch mathematisch nachgewiesen wird.

Aus dieser mathematischen Untersuchung folgt weiter, daß das Reflektionsaxiom, wonach z. B. beim schiefen Stoß elastischer Kugeln streng mathematisch physikalisch der Einfallswinkel gleich dem Ausfallwinkel sein soll, eine unbewiesene, falsche Behauptung ist. Abgesehen davon, daß jeder beliebige schiefe Stoß eine Rotation des Stoßkörpers in Erscheinung treten läßt, drängt z. B. ganz offensichtlich folgender einfache Versuch zur exakten Klärung der Zusammenhänge. Wählt man als Stoßkörper gemäß Bild 1 einen an langem Pendelfaden aufgehängten, mit erheblicher Einschnürung ($R > 2r$) versehenen Vollzylinder und bildet die Stoßfläche als in die Einschnürung ragende Schneide aus, kann sich abgesehen vom Auftreten der Rotation zeigen, daß der Reflektionswinkel β in völligem Widerspruch mit dem Reflexionsaxiom größer ist als $\pi/2$. Demnach ist die Voraussetzung berechtigt, daß bei schieferm Stoß eines der Abmessungen nach bekannten Körpers auf eine feste Stoßfläche bei gegebenem Einfallswinkel und gegebener Stoßgeschwin-

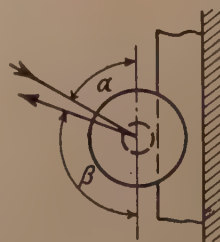
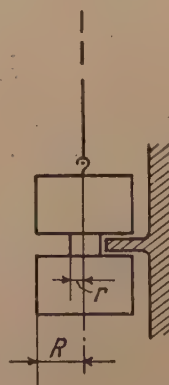


Bild 1

digkeit entgegen bisher üblicher Vorstellungsweise mindestens drei Unbekannte zu ermitteln sind: Der Ausfallwinkel, die translatorische und die Rotationsgeschwindigkeit auf ihm. Für nur drei Unbekannte ist dabei vereinfachende Voraussetzung, daß die Ebene, in der sich der Körperschwerpunkt bewegt, senkrecht auf der Stoßfläche steht und sie in ihrer Mittellinie schneidet. Sonst würden noch räumliche Kreiselbewegungen ausgelöst und die drei Unbekannten würden nicht ausreichen.

Zur Ermittlung der drei Unbekannten stehen bei völlig elastischem schieferm Stoß zur Verfügung:

1. Energiegleichung:

$$u^2 = v^2 + w^2.$$

Hierin bedeutet u die Geschwindigkeit auf dem Einfall-, v die auf dem Reflexionswinkel und w die Um-

fangsgeschwindigkeit auf dem Trägheitskreis des Stoßkörpers; der zu jedem Glied der Energiegleichung gehörende Faktor $m/2$ fällt heraus; m ist die Masse des Stoßkörpers. Neben Einfallwinkel α und Reflektionswinkel β werden zweckmäßig ihre Komplementwinkel A und B eingeführt. In Bild 2 ist O der Berührungspunkt an der Stoßstelle, S die Lage des Stoßkörperschwerpunktes im Augenblick der Stoßbeendigung. In weiterer Vereinfachung sei der Stoßkörper eine homogene Kugel. Strecke $O-S$ entspricht also ihrem Radius r .

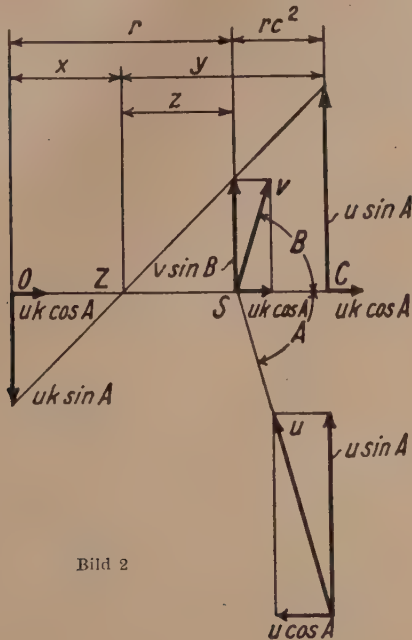


Bild 2

Der Drall des Stoßkörpers für O als Bezugspunkt kann sich durch den Stoß nicht ändern, da die durch O gehende Reaktionskraft als einzige äußere Kraft des Systems bezogen auf O kein Drehmoment hervorruft. Demnach gilt die Drallgleichung

$$mru \sin A = mvr \sin B + mwr c.$$

Hierin bedeutet cr den Trägheitsradius des Stoßkörpers. Gekürzt ergibt sich:

2. Drallgleichung:

$$u \sin A = v \sin B + w c.$$

Beim Zentralstoß hat die Stoßzahl k den Wert 1 bei völlig elastischem, 0 bei völlig unelastischem und $0 < k < 1$ bei beliebig elastischem Stoß. Bei schiefem Stoß entspricht die Normalkomponente des Stoßes dem Zentralstoß mit der Stoßzahl k , die Tangentialkomponente dem Tangentialstoß mit der hiermit neu eingeführten, gleichfalls empirisch feststellbaren Stoßzahl q , die noch nach Einfallwinkelgrößen abgestuft werden kann. Gleitende Reibung tritt beim schiefen Stoß elastischer Körper im allgemeinen kaum in Erscheinung, wie selbst bei ganz schiefen Stößen das Billardspiel lehrt und wie auch durch die plötzliche, das Gleiten hemmende Verformung der Stoßflächen durchaus einleuchtend ist. Eine um so größere Rolle spielt aber beim schiefen Stoß die Haftreibung, durch die der Stoßkörper an der Stoßstelle plötzlich eine ruckartige Abwälzbewegung ausführen muß. Erfahrungsgemäß ist der Haftreibungsverlust bei solcher rollenden Bewegung sehr klein. Der Tangentialstoß wird durch die bei der Verformung auftretende Schubspannung in ähnlicher Weise federnd abgefangen wie der Zentralstoß durch die Druckspannung. Soweit beide Spannungsarten dem H o o k'schen Gesetz folgen, ist daher in erster Annäherung die Annahme berechtigt, daß

$k = q$. Für $k = q = 1$, also im Idealfall völlig elastischen, gleitfreien schiefen Stoßes, haben sich bei Stoßbeendigung die beiden Geschwindigkeitskomponenten an der Stoßstelle genau umgekehrt und ihre Ursprungsgrößen wieder erreicht. Das gleiche gilt für ihre Resultierende $|u|$. Führt man nach F ö p p l, „Dynamik“, R. Oldenburg 1942, S. 246ff. die reduzierten Massen m_1 und m_2 ein und verlegt m_1 in O und m_2 in C , so folgt für S als Kugelschwerpunkt sofort:

$$\overline{OS} = r; \quad \overline{SC} = rc^2; \quad m_1 = m \frac{c^2}{1 + c^2}; \quad m_2 = m \frac{1}{1 + c^2}.$$

Auf alle Fälle hat S genau wie m_1 und m_2 nach Stoßbeendigung die Normalgeschwindigkeit $u \cos A$. Aus Bild 2 kann man daher zunächst ohne Einschaltung der reduzierten Massen m_1 und m_2 unmittelbar ablesen:

3. Geschwindigkeitsgleichung:

$$u \cos A = v \cos B.$$

Aus 1 bis 3 folgt:

$$w = u \frac{2c}{1 + c^2} \sin A$$

und nach Einführung von

$$4. \quad \frac{1 - c^2}{1 + c^2} = n$$

$$5. \quad v = u \sqrt{\cos^2 A + n^2 \sin^2 A}$$

$$6. \quad \operatorname{tg} B = n \operatorname{tg} A, \quad \text{ferner}$$

$$7. \quad \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v}{u}.$$

Diese Gleichung erinnert im Aufbau an das Brechungsgesetz. Durch 6. ist der Nachweis erbracht, daß für den völlig elastischen Stoß das Reflexionsaxiom falsch ist; denn Körper mit $c = 0$ gibt es nicht. Nach Einführung der Stoßzahl $k = q$ bleibt 2. gültig, nicht aber 1. und 3. Nach Stoßbeendigung hat jetzt die Tangentialgeschwindigkeitskomponente von m_1 den Wert $uk \sin A$ und die Normalkomponente von m_1 und m_2 sowohl wie von S den Wert $uk \cos A$. Nach Bild 2 folgt dann geometrisch bei Einführung von

$$x = ky, \quad p = \frac{1 - kc^2}{k(1 + c^2)} \quad \text{und} \quad z = r \frac{1 - kc^2}{1 + k}$$

$$8. \quad uk \cos A = v \cos B,$$

$$9. \quad \operatorname{tg} B = p \operatorname{tg} A,$$

$$10. \quad w = u \frac{c(1 + k)}{1 + c^2} \sin A,$$

$$11. \quad v = uk \sqrt{\cos^2 A + p^2 \sin^2 A}$$

Bei der Stoßzahl für Stahl ($k = 5/9$) wird bei homogenen Kugeln ($c^2 = 2/5$) durch ein seltsames Zahlenspiel der Natur $p = 1$. Die gleiche mittlere Stoßzahl dürfte für Elfenbeinbälle auf Billardbänke gelten. Diesem, den Augenschein täuschenden Zusammenhang verdankt das Reflexionsaxiom in Sonderfällen seine Gültigkeit. Nach 10. ist bei völlig unelastischem Stoß die durch den Stoß aufgetragene Rotationsgeschwindigkeit halb so groß wie die bei völlig elastischem Stoß.

Ergibt sich empirisch ein Unterschied zwischen k und q , so ist in Bild 2 lediglich $uk \sin A$ gegen $uq \sin A$ auszuwechseln, um die entsprechenden Gleichungen anzuschreiben, und es folgt für diesen verallgemeinerten Fall bei unverändert bleibender Drallgleichung:

$$12. \quad \operatorname{tg} B = \frac{1 - qc^2}{k(1 + c^2)} \operatorname{tg} A = n' \operatorname{tg} A,$$

$$13. \quad w = u \frac{c(1 + q)}{1 + c^2} \sin A.$$

$$14. \quad v = uk \sqrt{\cos^2 A + n'^2 \sin^2 A}.$$

Hat der Stoßkörper schon auf dem Einfallstrahl Rotation, liegen die Verhältnisse gleichfalls einfach, sofern die Rotationsachse senkrecht auf der Strahlebene steht. Die Strahlebene sei die Ebene, in der der Einfallstrahl liegt und die senkrecht auf der Stoßfläche steht; d sei genau wie w die auf den Trägheitskreis bezogene Umfangsgeschwindigkeit, jedoch vor dem Stoß. Durch die Vorzeichen von d und w regelt sich ihr Dreh-sinn. Als Drallgleichung folgt dann:

$$15. \quad u \sin A + dc = v \sin B + wc.$$

Nach Stoßbeendigung ergibt sich als Tangentialgeschwindigkeit für m_1 der Wert $u \sin A - d/c$ und für m_2 der Wert $u \sin A + dc$. Nach gleichem Verfahren wie zuvor gilt dann z. B. für den völlig elastischen Stoß:

$$16. \quad w = w_0 - d n_0.$$

Der Index 0 kennzeichnet hierbei die entsprechenden Werte des rotationsfreien Stoßes gemäß 4. und 6. Ferner gilt

$$17. \quad \tan B = n_0 \tan A + (2dc) / (u \cos A < 1 + c_2 >),$$

wodurch auch v gegeben ist.

Als Energiegleichung gilt die Kontrollgleichung

$$18. \quad u^2 + d^2 = v^2 + w^2.$$

Die zugehörigen Gleichungen nach Einführung von q und k regeln sich entsprechend den früheren Ableitungen.

Hat eine stoßende Kugel vor dem Stoß Eigenrotation um eine beliebige Schwerpunktsachse, so ist die räumliche Lage der Geschwindigkeitsvektoren zu ermitteln. Dies ist eindeutig durchführbar. Insbesondere sind dabei die Kreiselgesetze zu berücksichtigen, ferner die Tatsache, daß auch die räumliche Richtung des Dralles vor und nach dem Stoß unverändert bleibt. Der Reflektionsstrahl liegt dabei im allgemeinen nicht mehr in der Strahlebene.

Stoßen zwei Kugeln zusammen, so gilt sinngemäß alles Vorausgesagte. Zur Vereinfachung des Rechnungsganges nimmt man dabei den gemeinsamen Schwerpunkt des Systems als ruhend an und wählt ihn zum Koordinatenursprung. Zusätzlich zu den bisherigen Buchstaben treten für die zweite Kugel die großen Buchstaben mit gleicher Bedeutung. Nach dem Schwerpunktsatz gilt dann:

$$19. \quad MU = mu,$$

$$20. \quad MV = mv,$$

$$21. \quad em = fM,$$

$$22. \quad gm = hM.$$

e und f sind die lotrechten Abstände der Einfallstrahlen vom gemeinsamen Schwerpunkt und g und h die der Reflektionsstrahlen. Nach dem Schwerpunktsatz haben beide Körper die gleichgroßen Einfallswinkel A . Dies gilt auch für B . Der Gesamtdrall des Systems, bezogen auf den gemeinsamen Schwerpunkt, wird durch den Stoß nicht geändert:

$$23. \quad mue + MUf = mv g + mwrc + MVh + MWRC.$$

Das gleiche gilt beim völlig elastischen, gleitfreien Stoß für die mechanische Energie:

$$24. \quad MU^2 + mu^2 = MV^2 + MW^2 + mv^2 + mw^2.$$

Bezeichnet man den Abstand zwischen Berührungspunkt und Systemschwerpunkt mit H , so gilt noch geometrisch:

$$25. \quad g = (r + H) \sin B.$$

Durch 19. bis 25. sind die 7 Unbekannten V, v, W, w, B, g, h , zu ermitteln. Bei Einbeziehung von k, q, d , und D sind die reduzierten Massen einzuführen. M_1 und m_1 sind in den Berührungspunkt zu verlegen; alles Weitere regelt sich dann wie vorher beschrieben.

Hiermit sind wesentliche Hilfsmittel zur Klärung der Frage geschaffen, wie sich der elastische, schiefe Zusammenstoß von zwei Himmelskörpern regelt. Ein solcher Zusammenstoß muß ein gewisses Maß von Elastizität (Federkraft) besitzen, da völlig unelastische Körper in der Naturlehre unbekannt sind. Auch hängt diese Frage nicht gänzlich in der Luft, da z. B. Hertz die Stoßzeit zweier im Zentralstoß aufeinandertreffender Körper von der Größe der Erde in seine Rechnungen einbezogen hat. Sofern überhaupt Himmelskörper zusammenstoßen, ist der schiefe Stoß die Regel, die Wahrscheinlichkeit des reinen Zentralstoßes aber unendlich klein. Die Wahrscheinlichkeit des Zusammenstoßens überhaupt ist bei zwei Himmelskörpern, zusammen als Zweikörperproblem betrachtet, lediglich von der Größe ihres unveränderlichen Systemdralles abhängig, soweit er die translatorischen Bewegungen der Körper auf ihren Kegelschnittbahnen betrifft. Durch ihn wird entschieden, ob sie, sich auf Hyperbelbahnen aus weitester Ferne nähernd, miteinander in Berührung treten. Sofern dies geschieht, verursacht der Stoß ruckartig eine mehr oder weniger radikale Änderung von Form und Lage der beiden momentanen Kegelschnittbahnen, jedoch bei unverändert bleibendem Gesamtwert des Systemdralles. Einigermassen klare Voraussagen über den Verlauf eines solchen Vorganges sind denkbar, sofern insbesondere über die Stoßzahlen k und q brauchbare Aussagen vorliegen. Je größer die Massen der Körper und damit ihrer Entweichungsgeschwindigkeiten sind, um so hypothetischer sind aber solche Aussagen; denn k und q sind von der Stoßgeschwindigkeit abhängig. Es handelt sich also dabei um Werte der Himmelsmechanik, die allenfalls der Rechnung, kaum aber experimenteller Ermittlung zugänglich sein dürften. Gleichwohl sind z. B. bei hinlänglich klein und als Stahlkugeln gedachten Himmelskörpern unter voller Einbeziehung der Schwerkraft solche Werte exakt bestimmbar. Dann ist aber auch die Möglichkeit gegeben, den Verlauf der Kegelschnittbahnen und Rotationen genau anzuschreiben, um unter Berücksichtigung durchaus möglicher Stoßserien, vielleicht auch unter theoretischer Zuhilfenahme von Gezeitenwirkungen nachzuprüfen, ob und wie in der Natur Umwandlungen von Hyperbel- in Ellipsenbahnen unter gleichzeitiger Änderung der Eigenrotationen und Minderung der mechanischen Gesamtenergie durch den schiefen Stoß vor sich gehen könnten. Für den schiefen Stoß auf flüssige Oberflächen geben zudem z. B. die Untersuchungen „Über den Ricochetschuß“ (C. Ramsauer, Diss. Kiel 1903) gewisse Anhaltspunkte. Im übrigen zeigt das Sonnensystem manche rätselhafte Spuren, deren Zusammenhang mit schiefen elastischen Stößen denkbar ist.

Für die Lehre vom Licht ist bemerkenswert, daß das durch Foucault für Licht als zwingend gültig nachgewiesene Reflektionsaxiom auch wegen der ganz anders verlaufenden Reflektion von Körpern ein von körperlicher Reflektion abweichender Vorgang sein muß; es sei denn, man nimmt völlig reibungsfreie Körper an. Für solche fiktiven Gebilde kann mathematisch $q = -1$ werden, sodaß dann selbst bei beliebigen c für $k = +1$ nach 12. $\alpha = \beta$ und nach 14. $u = v$ wird.

Rheydt.

W. Schmidt.

Ermittlung einer Reihendarstellung des Kernes in r in elliptischen Koordinaten.

I. Einleitung.

Für spezielle Probleme der Potentialtheorie, von denen einige aus der ebenen Tragflügeltheorie stammen, ergeben sich die Lösungen gewisser Integralgleichungen besonders einfach, wenn für den symmetrischen Kern in r eine Bilinearformel in elliptischen Koordinaten benutzt wird, die man folgendermaßen gewinnen kann.

II. Einführung elliptischer Koordinaten. Ansatz einer Fourierreihe.

Wir denken uns die Kernfunktion mit

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= \xi + i\eta \\ z &= x + iy \end{aligned} \right\} \dots \dots (1),$$

in der Form dargestellt:

$$\left. \begin{aligned} \ln r &= \ln \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2} = \ln |\zeta - z| \\ &= \operatorname{Real} \ln (\zeta - z) = -\operatorname{Real} \int \frac{dz}{\zeta - z} \end{aligned} \right\} \dots (2).$$

Führen wir elliptische Koordinaten ein durch die Schar der konfokalen Ellipsen und Hyperbeln

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= -\operatorname{Co}f w; \quad w = u - iv; \quad 0 \leq v \leq 2\pi \\ z &= -\operatorname{Co}f W; \quad W = U - iV; \quad 0 \leq V \leq 2\pi \\ &\quad u \geq 0 \\ &\quad U \geq 0 \end{aligned} \right\} (3),$$

mit den umkehrbar eindeutigen Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= -\operatorname{Co}f u \cos v; \quad x = -\operatorname{Co}f U \cdot \cos V \\ \eta &= +\operatorname{Sin} u \sin v; \quad y = +\operatorname{Sin} U \sin V \end{aligned} \right\} (4),$$

so ist wegen der Periode 2π von v folgender Ansatz nahegelegt:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{\operatorname{Co}f W - \operatorname{Co}f w} = \frac{a_0}{2} \\ &+ \sum_1^\infty (a_n \cos nv + b_n \sin nv) \end{aligned} \right\} \dots (5),$$

mit

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos nv' dv'}{\operatorname{Co}f W - \operatorname{Co}f w'} \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin nv' dv'}{\operatorname{Co}f W - \operatorname{Co}f w'} \end{aligned} \quad n = 0, 1, 2 \dots$$

Setzen wir

$$e^{-w'} = e^{-u+iv'} = \sigma; \quad i\sigma dv' = d\sigma,$$

so sind die Fourierkoeffizienten durch folgende Integrale bestimmt:

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{2} &= -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\sigma|=e^{-u}} \frac{\sigma^n e^{nu} + \sigma^{-n} e^{-nu}}{\sigma^2 - 2\sigma \operatorname{Co}f W + 1} d\sigma; \\ \frac{b_n}{2} &= \frac{i}{2\pi} \oint_{|\sigma|=e^{-u}} \frac{\sigma^n e^{nu} - \sigma^{-n} e^{-nu}}{\sigma^2 - 2\sigma \operatorname{Co}f W + 1} d\sigma. \end{aligned}$$

Demnach wird

$$\frac{1}{\zeta - z} = -2J_0 - 2 \sum_1^\infty (e^{+nw} J_n + e^{-nw} J_{-n}) \quad (6),$$

wenn gilt

$$J_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\sigma|=e^{-u}} \frac{\sigma^n d\sigma}{\sigma^2 - 2\sigma \operatorname{Co}f W + 1} \quad (7).$$

III. Auswertung der komplexen Integrale für die Entwicklungskoeffizienten.

Die komplexen Integrale (7), die über einen Kreis mit dem Radius $|\sigma| = e^{-u}$ zu erstrecken sind, besitzen Singularitäten im Integranden an den Stellen $\sigma_0 = 0$; $\sigma_1 = e^{-W}$; $\sigma_2 = e^{+W}$. Nehmen wir zunächst den Aufpunkt z außerhalb der durch den Punkt ζ erklärten Ellipse an, so liegt wegen $U > u$ der Punkt σ_1 innerhalb des Kreises, während σ_2 außerhalb liegt.

Schreiben wir

$$f_n = \frac{\sigma^n}{(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2)}; \quad f_{-n} = \frac{\sigma^{-n}}{(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2)} \quad n' \geq 0,$$

so liefert f_n keinen Beitrag für das Residuum im Nullpunkt. Die Entwicklung von f_{-n} dagegen liefert

$$\begin{aligned} f_{-n} &= \frac{\sigma^{-n}}{\sigma_1 \sigma_2} \sum_{\mu=0}^\infty \left(\frac{\sigma}{\sigma_1} \right)^\mu \sum_{\nu=0}^\infty \left(\frac{\sigma}{\sigma_2} \right)^\nu \\ &= \sum_{\mu=0}^\infty \left(\sum_{\nu=0}^\infty \frac{\sigma^{\mu+\nu-n}}{\sigma_1^{\mu+1} \sigma_2^{\nu+1}} \right) \end{aligned}$$

und man findet nach Umordnung als Koeffizienten von $\frac{1}{\sigma}$

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{1}{\sigma_1^{n-\nu} \sigma_2^{\nu+1}}$$

und wegen $\sigma_1 \cdot \sigma_2 = 1$

$$\frac{1}{\sigma_1^n \sigma_2} \sum_{\nu=0}^{n-1} (\sigma_1^2)^\nu.$$

Das Residuum im Nullpunkt besitzt demnach den Wert

$$\operatorname{Res.} f_{-n}(\sigma=0) = \frac{\sigma_2^n - \sigma_1^n}{\sigma_2 - \sigma_1} \dots \dots (8).$$

Als Beitrag im Punkte σ_1 ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Res.} f_n(\sigma=\sigma_1) &= \frac{\sigma_1^n}{\sigma_1 - \sigma_2}, \\ \operatorname{Res.} f_{-n}(\sigma=\sigma_1) &= \frac{\sigma_1^{-n}}{\sigma_1 - \sigma_2} \end{aligned} \right\} \dots \dots (9).$$

Demnach wird

$$J_n = J_{-n} = \frac{\sigma_1^n}{\sigma_1 - \sigma_2} = -\frac{e^{-nW}}{2 \operatorname{Sin} W},$$

so daß wir erhalten

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\operatorname{Sin} W} \left(1 + 2 \sum_1^\infty e^{-nW} \operatorname{Co}f nw \right) \dots \dots (10)$$

und nach Integration

$$\begin{aligned} \ln(\zeta - z) &= - \int \frac{dz}{\zeta - z} = \int \frac{\operatorname{Sin} W dW}{\zeta - z} \\ &= W + \operatorname{const.} - 2 \sum_1^\infty \frac{e^{-nW}}{n} \operatorname{Co}f nw. \end{aligned} \quad (11).$$

Betrachten wir nun den Fall, daß der Aufpunkt z innerhalb der durch den Punkt ζ erklärten Ellipse liegt, so liegen wegen $U < u$ σ_1 wie auch σ_2 außerhalb des Integrationskreises $|\sigma| = e^{-u}$, so daß nur die Anteile des Nullpunktsresiduums in Betracht kommen. Es ergibt sich mit

$$J_n = 0; \quad J_{-n} = \frac{\sigma_2^n - \sigma_1^n}{\sigma_2 - \sigma_1} = \frac{\operatorname{Sin} nW}{\operatorname{Sin} W}$$

die Entwicklung

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{2}{\operatorname{Sin} W} \sum_1^\infty e^{-nW} \operatorname{Sin} nW \dots \dots (12)$$

und nach Integration

$$\ln(\zeta - z) = (\operatorname{const.} - 2) \sum_1^\infty \frac{e^{-nW}}{n} \operatorname{Co}f nW \dots \dots (13).$$

Durch Zerlegung in Real- und Imaginärteil ergibt sich für $U > u$

$$\left. \begin{aligned} \ln |\xi - x| &= \ln \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2} \\ &= U - \ln 2 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nU}}{n} \\ \cdot (\cos nu \cos nv \cos nV + \sin nu \sin nv \sin nV) \\ \text{Arc}(\xi - z) &= \\ &= 2\pi - V - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nU}}{n} \\ \cdot (\cos nu \cos nv \sin nV - \sin nu \sin nv \cos nV) \end{aligned} \right\} (14)$$

und für $U < u$

$$\left. \begin{aligned} \ln |\xi - x| &= \ln \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2} \\ &= u - \ln 2 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nu}}{n} \\ \cdot (\cos nU \cos nV \cos nv + \sin nU \sin nV \sin nv) \\ \text{Arc}(\xi - z) &= \\ &= \pi - v - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nu}}{n} \\ \cdot (\cos nU \cos nV \cos nv - \sin nU \sin nV \sin nv), \end{aligned} \right\} (15)$$

wobei die Integrationskonstanten mit $U \rightarrow \infty$ und durch Vergleich bestimmt worden sind.

Aus diesen Reihenentwicklungen folgen einige spezielle Bilinearformeln, von denen die für $\ln |\xi - x|$ die bekannteste ist¹⁾:

$$\ln |\xi - x| = \ln |\cos v - \cos V|$$

$$= -\ln 2 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nv \cos nV}{n} \quad (16).$$

IV. Anwendungen.

Mit Hilfe der gegebenen Reihenentwicklungen sind wir in der Lage folgende Integralgleichungen zu behandeln

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{2\pi} \varphi(v) \ln r(U, u; V, v) dv &= \\ \lambda(U, u) \varphi(V), \quad U \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (17).$$

Nach (14) und (15) wird sie gelöst durch die folgenden Eigenfunktionen und Eigenwerte

$$\left. \begin{aligned} U > u \\ \varphi_0(v) &= 1 & \lambda_0 &= 2\pi(U - \ln 2) \\ \varphi_n^c(v) &= \cos nv & \lambda_n^c &= -2\pi \frac{e^{-nU}}{n} \cos nu \\ \varphi_n^s(v) &= \sin nv & \lambda_n^s &= -2\pi \frac{e^{-nU}}{n} \sin nu \\ U < u \\ \lambda_0 &= 2\pi(u - \ln 2) \\ \lambda_n^c &= -2\pi \frac{e^{-nu}}{n} \cos nU \\ \lambda_n^s &= -2\pi \frac{e^{-nu}}{n} \sin nU \end{aligned} \right\} (17a).$$

Wie man erkennt, gehen die Eigenwerte des Problems $U < u$ stetig in die des Problems $U > u$ über.

¹ G. Hamel: Integralgleichungen. Berlin: Julius Springer 1937.

Entsprechend findet man für die Integrodifferentialgleichung

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial V} \int_0^{2\pi} \varphi(v) \text{Arc}(\xi - x; \eta - y) dv \\ = \lambda(U, u) \varphi(V), \quad U \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (18),$$

die Lösungen

$$\left. \begin{aligned} U > u \\ \varphi_0(v) &= 1 & \lambda_0 &= -2\pi \\ \varphi_n^c(v) &= \cos nv & \lambda_n^c &= -2\pi e^{-nU} \cos nu \\ \varphi_n^s(v) &= \sin nv & \lambda_n^s &= -2\pi e^{-nU} \sin nu \\ U < u \\ \lambda_0 &= 0 \\ \lambda_n^c &= 2\pi e^{-nu} \cos nU \\ \lambda_n^s &= 2\pi e^{-nu} \sin nU \end{aligned} \right\} (18a).$$

Weitere Integralformeln ergeben sich z. B. auch dadurch, daß man die vorangehenden nach den Parametern U, u oder V differenziert. So gewinnt man aus (17)

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial U} \int_0^{2\pi} \varphi(v) \ln r(U, u; V, v) dv$$

$$= \frac{\partial^2 \lambda(U, u)}{\partial U \partial u} \cdot \varphi(V).$$

Mit $u = U = 0$ und

$$\frac{\partial}{\partial u} = -\sin u \cos v \frac{\partial}{\partial \xi} + \cos u \sin v \frac{\partial}{\partial \eta}$$

erhält man aus (17) und (19) die speziellen Integralgleichungen

$$\left. \begin{aligned} \int_{-1}^{+1} \frac{\varphi_n(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} \ln |\xi - x| d\xi &= \lambda_n \varphi_n(x); \\ \varphi_n &= \cos nv, \quad \xi = -\cos v \\ \lambda_0 &= -\pi \ln 2, \\ \lambda_n &= -\pi/n \quad n \geq 1 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

bzw.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{-1}^{+1} \sqrt{1-\xi^2} \varphi_n(\xi) \ln |\xi - x| d\xi &= \mu_n \varphi_n(x); \\ \varphi_n &= \frac{\sin nv}{\sin v}, \quad \xi = -\cos v \\ \mu_n &= \pi n, \quad n \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

bei Berücksichtigung der Identität

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \ln \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2} \equiv 0.$$

Die Aufgabe, das Potential zu bestimmen, das von einer auf einer Ellipse verteilten Belegung in außerhalb liegenden Punkten erzeugt wird, läßt sich nach (17) wie folgt lösen: Mit einer quadratisch integrierbaren Belegungsfunktion

$$q(v) = \sum_0^{\infty} A_n \cos nv + B_n \sin nv$$

wird das Potential

$$\Phi(U, u; V) = \int_0^{2\pi} q(v) \ln r(U, u; V, v) dv$$

wegen der Vollständigkeitsrelation von der Form

$$\frac{\Phi}{2\pi} = A_0(U - \ln 2) - \sum_1 \frac{e^{-nU}}{n}$$

$$\cdot (A_n \cos nU \cos nV + B_n \sin nU \sin nV)$$

Der Sonderfall einer Streckenbelegung auf der x -Achse zwischen -1 und $+1$, für den ein \cos -Reihenansatz genügt, liefert mit

$$\varrho(v) = \sum_0^\infty A_n \cos nv \quad 0 \leq v \leq 2\pi$$

$$\frac{\Phi}{2\pi} = A_0(U - \ln 2) - \sum_1 \frac{e^{-nU}}{n} A_n \cos nV$$

Die übrigen erwähnten Kernfunktionen mit ihren Entwicklungen erlauben es, auch andere potentialtheoretische Probleme zu behandeln, wie z. B. die Frage nach der Wirkung einer auf Ellipse oder Strecke gelegenen Wirbel- oder Quellschicht.

Hannover.

K. Jaeckel.

Experimentelle Untersuchung zur Grenzschichtentstehung an Zylindern bei Anfahrt aus der Ruhe.

Die Blasius'schen Ansätze [1]¹⁾ zur Berechnung instationärer Grenzschichtströmungen aus dem Jahre 1908 — noch bis heute der wesentliche Bestand unserer theoretischen Methoden zur Behandlung instationärer Grenzschichtprobleme von einiger Allgemeinheit — beziehen sich auf die Ausbildung der laminaren Grenzschicht an Zylindern bei Anfahrt aus der Ruhe relativ zur umgebenden Flüssigkeit. Diese Ansätze sind inzwischen einerseits analytisch und numerisch weiter ausgebaut und auch für rotationssymmetrische Probleme durchgeführt, zum anderen auf allgemeinere Bewegungsgesetze der Anfahrt aus der Ruhe übertragen worden [2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10]. (Der Fall einer Strömung an einer unendlich ausgedehnten ebenen Wand, der, wie einige andere spezielle Strömungen auf eine lineare Differentialgleichung vom Wärmeleitungstyp führt, ist kürzlich unter neuartigen Bedingungen untersucht worden [11].)

Da meines Wissens noch keine quantitative Nachprüfung der Blasius'schen Theorie vorliegt, erscheint es mir gerechtfertigt, im folgenden einige experimentelle Ergebnisse aus dem Jahre 1939 mitzuteilen, deren Veröffentlichung bisher unterblieb. Die etwas mühsame Untersuchung wurde mit den mir damals gerade zur Verfügung stehenden Mitteln am Kaiser-Wilhelm-Institut für Strömungsforschung in Göttingen durchgeführt.

Man erhält nach Blasius in verhältnismäßig einfacher Rechnung eine befriedigende Approximation des Grenzschichtverlaufs vom Zeitpunkt des Bewegungsbeginns an für nicht zu große Fahrzeiten. Da die Theorie von der Voraussetzung Gebrauch macht, daß die Potentialströmung außerhalb der körpernahen Grenzschicht durch diese nicht wesentlich gegenüber der reibungslosen Strömung modifiziert wird, kann ohnehin jedenfalls nach einer stärkeren Grenzschichtablösung eine brauchbare Approximation der wirklichen Verhältnisse nicht mehr erwartet werden. (Vgl. zu dieser Frage [8].)

Die im folgenden geschilderten Beobachtungen beziehen sich auf den ruckartigen Übergang eines elliptischen Zylinders aus der Ruhe in die geradlinig-gleichförmige Bewegung in Richtung einer Hauptachse des Ellipsenquerschnitts („nicht-angestellter“ elliptischer Zylinder). Die zugehörigen Ergebnisse der Theorie findet man in meiner Arbeit [10]. Die Experimente wurden in einem für Schleppversuche eingerich-

teten Wassertank des genannten Instituts vorgenommen, der in der Literatur mehrfach ausführlich beschrieben worden ist, vgl. etwa [4]. Sie betrafen Ort und Zeit des Ablösungsbeginns und das erste Stadium der Wanderung der Ablösungsstelle längs der Zylinderkontur für weiter wachsende Zeiten. Die Sichtbarmachung der Strömungsvorgänge erfolgte durch Aufstreuen feiner Teilchen (Al-Pulver) auf die Wasseroberfläche (Methode von Ahlborn). Die Bewegung der Teilchen beim Hindurchschleppen des Zylinders durch die Flüssigkeit wurde von einem mit dem Zylinder mitbewegten Aufnahmeapparat kinematographisch festgehalten. Die ausnutzbare Fläche des Tanks betrug $340 \times 50 \text{ cm}^2$.

Beim Einschalten der elektrischen Antriebsvorrichtung bewegte sich der Zylinder in guter Näherung nach dem theoretisch gut erforschten Gesetz des ruckartigen Übergangs aus der Ruhe in die geradlinig-gleichförmige Bewegung. Die Beschleunigungszeit (Zeit vom Bewegungsbeginn bis zur praktisch vollkommen gleichförmigen Bewegung) betrug in den angestellten Versuchen nach sorgfältiger Ermittlung 0,2 bis 0,3 sec.

Um die zeitliche Entwicklung des Bewegungsvorgangs in der Flüssigkeit leichter zu erfassen, mußte angestrebt werden, die Zeit $t = t_A$ vom Bewegungsbeginn bis zum Einsetzen der Grenzschichtablösung möglichst groß werden zu lassen. (Selbstverständlich sollte sie zumindest groß sein gegenüber der oben genannten Beschleunigungszeit.) Nach der Theorie ist (vgl. etwa [10], Gl. (20))

$$t_A = 0,64 \frac{m^2}{1+m} \frac{a}{U}$$

Dabei ist $m = b/a$ das Verhältnis der Ellipsenhalbachse b quer zur Bewegungsrichtung zur Ellipsenhalbachse a in Bewegungsrichtung und U ist die Fahrgeschwindigkeit des Zylinders. Ferner ist $m \leq 2/\sqrt{3}$ vorausgesetzt, wonach die Ellipse so schlank sein soll, daß nach der Theorie Ablösung im hinteren Staupunkt einsetzt. Nach dieser Formel waren somit kleine Fahrgeschwindigkeiten U und große Zylinderquerschnitte zu wählen. Zur Vermeidung eines merklichen Einflusses der Kanalbreite (50 cm) durften jedoch die Zylinderabmessungen nicht zu groß gewählt werden, und die Fahrgeschwindigkeit durfte wiederum nicht zu klein sein, damit die Geschwindigkeit der zu verfolgenden Flitterteilchen noch im Mittel hinreichend groß blieb gegenüber den Geschwindigkeiten der unvermeidlichen Störbewegungen (Bodenerschütterungen, thermische Bewegungen nach Einschalten der starken Beleuchtungskörper), die nach unseren Feststellungen unter 1 mm/sec lagen. Die Fahrgeschwindigkeiten betrugen in den schließlich angestellten Versuchen etwa 8 mm/sec. Die unten ausführlicher wiedergegebenen Resultate insbesondere beziehen sich auf einen Zylinder mit $a = 10 \text{ cm}$ und $b = 5 \text{ cm}$, also $m = 1/2$. Nach der Theorie war somit eine Ablösungszeit t_A von etwa 1,3 sec zu erwarten. Die Versuche wurden über das Vierfache dieser Zeit ausgedehnt. Es wurden Filmaufnahmen gedreht mit etwa 25 Aufnahmen pro Sekunde. Die Bewegung eines Uhrzeigers und eines an einem raumfesten Lineal mit dem Körper entlanglaufenden Zeigers wurden zur sorgfältigen Ermittlung von jeweiliger Laufzeit und -geschwindigkeit mitphotographiert.

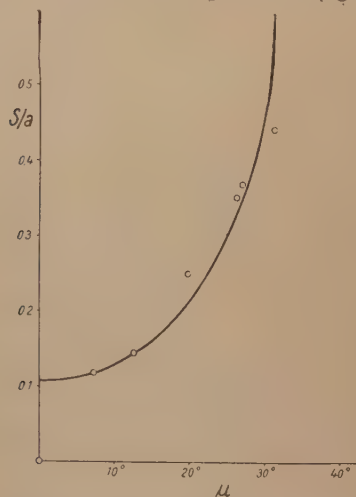
Die Auswertung der Filme erfolgte durch Projektion auf einen Wandschirm mit aufgezeichneter Ellipse, wobei das jeweils ins Auge gefaßte Al-Teilchen von Bild zu Bild leicht zu verfolgen war. In Schritten von im allgemeinen fünf Bildern wurden Lage und Uhrzeit auf der Wandschablone eingetragen (also in Zeitschritten von etwa 0,2 sec, womit die jeweils in der anströmenden Flüssigkeit zurückgelegten Wege etwa 1,6 mm, auf dem Projektionsschirm bei der gewählten dreifachen Vergrößerung somit 4,8 mm betrugen). Bei der Verfolgung der Al-Teilchen in der Nähe der momentanen Ablösungsstelle mußte darauf geachtet werden, daß solche Teilchen für die Beobachtung ausgeschieden wurden, die beim Überholen eines anderen Teilchens einen Zu-

¹⁾ Die in eckigen Klammern angegebenen Ziffern verweisen auf die am Schlusse dieser Mitteilung genannte Literatur.

sammenstoß mit diesen erlitten oder sich gar mit diesem durch Hängenbleiben zusammenballten, ferner daß einzelne an der mit einer Paraffinschicht versehenen Zylinderoberfläche hängenbleibenden Teilchen nicht zu merklichen Störungen des verfolgten Teilchens Anlaß gaben. Schließlich mußte selbstverständlich für eine völlig saubere Wasseroberfläche gesorgt werden, um auch durch Verschmutzung verursachte Zusatzbewegungen auf der Oberfläche auszuschließen. Dies alles erschwerte sehr die Auswertung, bei der pro Film jeweils nur bis zu drei der verfolgten, hinreichend wandnahen Teilchen in Nähe der wandernden Ablösungsstelle als einwandfrei akzeptiert wurden. Bei den Versuchen erfreute ich mich der reichen Erfahrung und des besonderen Geschicks von Herrn W. Müller, bei der Auswertung der großen Geduld von Frl. J. Wolters.

Eine gewisse unvermeidbare Ungenauigkeit der Beobachtungsmethode mußte hingenommen werden: Die Teilchen wandern zunächst mit unerheblich abnehmender Geschwindigkeit bis fast unmittelbar an die ihnen entgegenwandernde (stromaufwärtsrückende) Ablösungslinie, bremsen dann verhältnismäßig rasch ab, rücken dabei sehr langsam etwas von der Wand ab, bleiben relativ lange Zeit praktisch fast in Ruhe, um dann in eine rückläufige Bewegung überzugehen; es sind daher der momentane Ort der Ablösung und die zugehörige Zeit nicht mit der wünschenswerten Genauigkeit zu ermitteln. Ferner scheint das Verhalten der Grenzschichten an der Wasseroberfläche etwas von dem Verhalten in größeren Tiefen abzuweichen.

Die Beobachtungsergebnisse für den genannten Zylinder mit $m = 1/2$ sind im nebenstehenden Bild eingetragen und mit der Theorie (ausgezogene Kurve, „zweite Näherung“ im Sinne meiner Arbeit [10]) verglichen. Dabei ist die Abszisse μ der zur jeweiligen Ablösungsstelle gehörige Inkreiszentriwinkel der Ellipse, gemessen vom hinteren Staupunkt aus (vgl. [10]), und



Zusammenhang zwischen Ort der Ablösungsstelle und Fahrweg des Zylinders ($m=0,5$) nach Theorie (ausgezogene Kurve) und Experiment.

die Ordinate stellt den in Vielfachen von a aufgetragenen, vom Zylinder zurückgelegten Fahrweg S dar. Wenn auch die Ausbeute angesichts des Aufwandes bescheiden bleiben mußte, so sind die Ergebnisse doch aufschlußreich. Nicht nur die Zeit des Ablösungsbeginns wird von der Theorie gut wiedergegeben, sondern — und dies ist bemerkenswert — die Wanderung der Ablösungsstelle während der weiteren Fahrt des Zylinders stimmt noch bis zu Zeiten von etwa $4 t_A$ befriedigend mit den Ergebnissen der Theorie überein, einer Theorie, die eine Modifikation der äußeren Potentialströmung durch die anwachsende Grenzschicht und insbesondere durch die Ablösung derselben vom Körper unberücksichtigt läßt. Die Veränderung der

äußeren Strömung infolge der Verdrängungswirkung der Grenzschicht beeinflusst offenbar die zeitliche Wanderung der Ablösungsstelle erst sehr spät.

Entsprechend sorgfältige Messungen wurden auch bei Querstellung des Zylinders (also $m=2$) und für einen Kreiszylinder ($m=1$) vorgenommen. Die Ergebnisse sind vernichtet worden. Es kann daher hier nur mitgeteilt werden, daß auch in diesen Fällen Ort und Zeit des Ablösungsbeginns (für $m=2$ an zwei zum hinteren Staupunkt symmetrischen Stellen der Kontur einsetzend) in gleich guter Übereinstimmung mit der Theorie beobachtet wurden. Für weiter wachsende Zeiten ergaben sich bei diesen größeren Dickenverhältnissen m etwas früher systematische Abweichungen zwischen Theorie und Experiment für den Zusammenhang zwischen Ort und Zeit der wandernden Ablösungsstelle.

Literatur

- [1] H. Blasius: Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung. Z. Math. Phys. **56**, 1–37 (1908).
- [2] E. Boltze: Grenzschichten an Rotationskörpern in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung. Diss. Göttingen 1908.
- [3] W. Tollmien: Grenzschichttheorie. Hdb. Experimentalphysik **4**, Teil I. Leipzig 1931, S. 275 u. 279.
- [4] M. Schwabe: Über Druckermittlung in der nichtstationären ebenen Strömung. Ing.-Arch. **6**, 34–50 (1935).
- [5] L. Howarth: Note on the development of the circulation around a thin elliptic cylinder. Proc. Cambridge Phil. Soc. **31**, 582–584 (1935).
- [6] S. Goldstein u. L. Rosenhead: Boundary layer growth. Proc. Cambridge Phil. Soc. **32**, 392–401 (1936).
- [7] T. Sakurai: New method of evaluating the flow in boundary layer which varies with time. Proc. Phys. Math. Soc. Japan **21**, 632 (1939).
- [8] H. Görtler: Verdrängungswirkung der laminaren Grenzschichten und Druckwiderstand. Ing.-Arch. **14**, 286–305 (1944).
- [9] H. Görtler: Zur Grenzschichtentstehung an Zylindern bei Anfahrt aus der Ruhe (Vortragsauszug). Z. angew. Math. Mech. **25/27**, 145–146 (1947).
- [10] H. Görtler: Grenzschichtentstehung an Zylindern bei Anfahrt aus der Ruhe. Arch. Math. **1**, 138–147 (1948/49).
- [11] W. Wuest: Beitrag zur instationären laminaren Grenzschicht an ebenen Wänden. Ing.-Arch. **17**, 193–198 (1949).

Freiburg i. Br.

H. Görtler.

Ein Einstelldiagramm für Regelvorgänge.

Bei vielen Regelvorgängen, insbesondere in der Verfahrenstechnik (z. B. Temperaturregelung in Öfen u. dgl.), läßt sich die Regelstrecke als ein statisches, lineares System erster Ordnung darstellen, das zusätzlich mit einer konstanten Zeitverzögerung, einer sog. Laufzeit T_L behaftet ist. Außer durch T_L ist damit die Regelstrecke durch ihren Ausgleichsgrad s_0 und ihre Anlaufzeit s_1 (bzw. durch ihre Zeitkonstante $T_1 = s_1/s_0$) bestimmt und würde ohne Laufzeit T_L der Gleichung

$$s_1 \varphi' + s_0 \varphi = -\mu_s \dots \dots (1)$$

folgen. Dabei bedeutet φ die Regelgröße und μ_s die in der Regelstrecke zur Auswirkung kommende Stellgröße.

Die Regler werden im allgemeinen als mittelbare Regler mit vorübergehender Statik ausgeführt, was durch eine nachgiebige Rückführung erreicht wird. Die Regelvorgänge spielen sich langsam ab (Schwingungsdauern von mehreren Minuten), so daß die durch Trägheitswirkungen im Regler entstehenden Verzö-

Das Ausschlag-Zeit-Diagramm einer „einfachen Schwebung“.

In dem (im übrigen ausgezeichneten) Werk von K. W. Wagner¹ finden sich über die sogenannte „einfache Schwebung“ Ausführungen, die es angezeigt erscheinen lassen, die Frage noch einmal kurz zu streifen.

Unter einer Schwebung versteht man die Überlagerung zweier harmonischer Schwingungen,

$$x = A_1 \sin \omega_1 t + A_2 \sin (\omega_2 t + \alpha) \dots (1)$$

die benachbarte Frequenzen ω_1 und ω_2 aufweisen. Es ist bekannt, daß ein solcher Vorgang sich darstellen läßt als eine sinusförmig amplituden-modulierte Schwingung. Wenn die Amplituden der beiden Summanden gleich sind, $A_1 = A_2 = A$, spricht man von einer einfachen Schwebung. Sie läßt sich darstellen als

$$x = 2A \cos \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t - \frac{\alpha}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \frac{\alpha}{2} \right) (2).$$

Es ist ferner bekannt, wie das Ausschlag-Zeit-Diagramm durch Projektion des „erzeugenden Diagrammvektors“ (bei Wagner: „Speers“) zustande kommt: Die erzeugenden Vektoren α_1 und α_2 der beiden Teilschwingungen addieren sich; es gibt im Abstand

$$\tau = 2\pi/(\omega_1 - \omega_2)$$

Augenblicke [bei den Nullstellen des ersten trigonometrischen Faktors in (2)], wo der erzeugende Vektor der Summenschwingung verschwindet. Soweit herrscht Übereinstimmung in allen Darstellungen.

An die zuletzt beschriebene Erscheinung, das Verschwinden des resultierenden erzeugenden Vektors, schließt Wagner nun folgende Bemerkung²⁾ an:

„Beim Durchgang des resultierenden Speeres durch Null ändert er zugleich seine Richtung um 180°; die Schwingung erleidet an dieser Stelle einen entsprechenden Phasensprung, der in Abb. 18 gleichfalls erkennbar ist.“

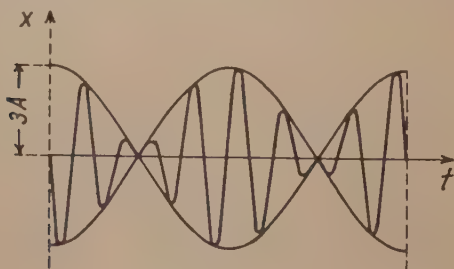


Bild 1.

Die Abb. 18 ist hier als Abb. 1 wiedergegeben; sie zeigt bei den „Schwebungsknoten“ eine Unstetigkeit der Richtung der $x-t$ -Linie, also eine Unstetigkeit der Ableitung (Geschwindigkeit) \dot{x} . Eine solche Unstetigkeit kann es aber nicht geben. Man erkennt dies schon einfach aus der Darstellung des Vorgangs nach Gl. (2). Die Ableitung enthält wieder nur Produkte aus Sinus- und Cosinus-Funktionen; Sprünge im Sinne von Unstetigkeiten können nicht zustande kommen.

Welchen Sinn kann man nun dem Ausdruck „Phasensprung“ unterlegen?

Die meisten der Nullstellen der Funktion $x(t)$ werden durch die Nullstellen des zweiten harmonischen Faktors in (2) bezeichnet. Die Funktion $x(t)$ verschwindet

dort deshalb, weil der erzeugende Vektor (Speer) in die Projektionsrichtung fällt; es verschwindet also die Projektion eines von Null verschiedenen Vektors (Speers). Wir wollen diese Nullstellen „reguläre Nullstellen“ nennen. Daneben gibt es noch „überzählige“ Nullstellen. Sie sind die Nullstellen des ersten (harmonischen) Faktors. Dort verschwindet $x(t)$ deshalb, weil der erzeugende Vektor selbst verschwindet.

Nun unterscheiden wir zwei Fälle je nachdem, ob die überzähligen Nullstellen mit einer der regulären Nullstellen zusammenfallen oder nicht. Wir beginnen mit der zweiten Möglichkeit: Bei den Nullstellen von

$$\sin \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \frac{\alpha}{2} \right)$$

wird die Zeitachse abwechselnd im steigenden und im fallenden Sinn durchlaufen. Sobald eine „überzählige“ Nullstelle auftritt, kehrt sich (weil der Faktor

$$\cos \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t - \frac{\alpha}{2} \right)$$

sein Vorzeichen ändert) diese Zuordnung um. Man kann diese Umkehrung der Zuordnung von Nummer der Nullstelle und Richtung des Durchgangs durch die Achse einen „Phasensprung“ nennen. Der erzeugende Vektor der Summenschwingung hat seinen Phasenwinkel plötzlich um 180° geändert. Das Bild der Funktion $x(t)$ sieht dann so aus, wie Abb. 2 angibt.

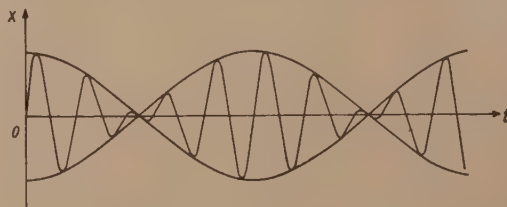


Bild 2.

Fällt die überzählige Nullstelle mit einer der regulären Nullstellen zusammen, so sieht die Funktion so aus wie Abb. 3 angibt. Auch hier tritt ein „Phasensprung“ beim erzeugenden Vektor auf. Er zeigt sich wieder in der Umkehrung der Zuordnung von Nummer der Nullstelle und Richtung des Durchgangs durch die Achse. Von einem Sprung der Funktion $x(t)$ kann auch hier keine Rede sein.

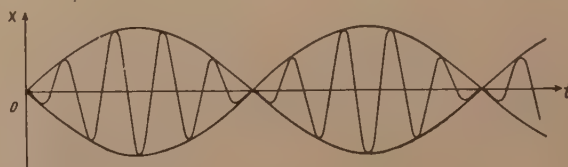


Bild 3.

Man sieht, wie vorsichtig man mit der Wahl von Bezeichnungen sein muß: an der angeführten Stelle wurde eine Erscheinung (daß nämlich der erzeugende Vektor plötzlich seinen Phasenwinkel um π ändert) mit dem Namen Phasensprung belegt. Aus dieser Benennung wurde dann auf das Auftreten einer Erscheinung nach Abb. 1 geschlossen; dieser Schluß ist jedoch falsch.

Karlsruhe.

K. Klotter.

¹⁾ K. W. Wagner, Die Lehre von den Schwingungen und Wellen, Wiesbaden 1947, Dietrichsche Verlagsbuchhandlung.

²⁾ a. a. O. S. 15, letzter Absatz.

BUCHBESPRECHUNGEN

Dr. sc. techn. F. Schultz-Grunow (o. Prof. d. allg. Mechanik a. d. Techn. Hochschule Aachen), *Einführung in die Festigkeitslehre*. 244 S. m. 239 Abb. Düsseldorf-Lohausen 1949. Werner-Verlag G. m. b. H. Preis brosch. 15,— DM.

Das umfangreiche seitherige Schrifttum über Festigkeitslehre und Elastizitätstheorie kann man im wesentlichen nach zwei Gesichtspunkten ordnen: Einerseits handelt es sich um Bücher, welche nur die ganz elementare Festigkeitslehre nebst den vereinfachten Gebrauchsformeln vermitteln; andererseits um Werke über höhere Festigkeitslehre und Elastizitätstheorie, welche weitgehende mathematische Kenntnisse voraussetzen und daher ihren Leserkreis vorwiegend in Kreisen der Hochschulstudierenden und der akademisch gebildeten Ingenieure suchen. Die Kluft zwischen dem wissenschaftlichen Niveau beider Bucharten ist infolge der starken Entwicklung der theoretischen Festigkeitsforschung ständig im Wachsen begriffen, so daß sich bei den Studierenden bereits ein gewisser Mangel an solchen Büchern herausgestellt hat, welche den Leser mit einfachen und mehr anschaulichen Methoden bei einem Mindestaufwand an mathematischem Rüstzeug von der elementaren Festigkeitslehre aus zu einzelnen für die Praxis besonders wichtigen Teilgebieten der höheren Festigkeitslehre und Elastizitätstheorie führen. Neben den heute vielfach vergriffenen Föppl'schen Büchern gehört hierher auch das in dieser Zeitschrift besprochene Büchlein von C. Weber. Das nunmehr vorliegende Buch des Aachener Mechanikprofessors Schultz-Grunow ist gleichfalls der Aufgabe gewidmet, eine Einführung in die (elementare und höhere) Festigkeitslehre zu geben und dabei mit den einfachsten mathematischen Methoden auszukommen. Entsprechend dem Buchumfang konnte der Verf. seinen Stoff auf wesentlich breiterer Grundlage entwickeln, als es C. Weber in seinem kurz gefaßten Buche möglich war. Dank der vielen klar ausgeführten Abbildungen und Erläuterungen führt der Verf. den Leser verhältnismäßig gründlich in die Vorstellungswelt der Festigkeitsbegriffe ein. Einzelne Probleme sind weitgehend durchgerechnet und diskutiert, wenn auch die Stoffauswahl des als Einführung gedachten Buches für den Gebrauch des in der Praxis stehenden Ingenieurs natürlich nicht ausreichen kann; dieser wird sich jedoch nach dem Studium des Buches mit um so größerer Leichtigkeit den im Rahmen der jeweiligen speziellen Aufgabe erforderlichen Spezialwerken zuwenden können. Schließlich wird auch der angewandte Mathematiker manche Anregung vorfinden obwohl ihn naturgemäß manche mit der Anschauung geführten Herleitungen und Beweise nicht befriedigen werden, deren exakte Formulierung er jedoch leicht in der Spezialliteratur nachsehen kann. So hilft das neue Buch, die Kluft zwischen der einfachen Festigkeitslehre und der höheren Theorie zu schließen, und es wird sicher von weiten Kreisen begrüßt werden.

Dresden.

H. Neuber,

Helmut Hasse (o. Prof. a. d. Univ. Berlin, Direktor am Forschungsinstitut für Math. d. deutschen Akademie d. Wiss. zu Berlin), *Zahlentheorie*. — Oktav bröschiert, XII + 468 S. Berlin 1949. Akademie-Verlag. Ladenpreis geb. 44,— DM.

Das Werk ist der erste Band einer geplanten Gesamtdarstellung der modernen Zahlentheorie. Es stellt die Theorie der algebraischen Zahlen in divisorentheoretischer Begründung dar, wie sie von Hensel, dessen Gedächtnis es auch gewidmet ist, begonnen und darauf von anderen fortentwickelt wurde. Die in Hensels „Zahlentheorie“ (Göschel 1913) angebaute Charakterisierung algebraischer Zahlen durch g -adische Reihen finden wir hier in einer dem neuesten Stande der Erkenntnis angepaßten Form und Vollendung auf eingehend dargestellter bewertungstheoretischer Grund-

lage wieder. Der Verfasser selbst kennzeichnet den wesentlichen Unterschied dieser Begründung der algebraischen Zahlentheorie gegenüber der idealtheoretischen folgendermaßen: „Während dort eine zunächst willkürlich erscheinende Definition des Begriffes der ganzen algebraischen Zahlen an die Spitze gestellt wird, ergibt sich hier der Integritätsbereich I der ganzen algebraischen Zahlen aus K , der der Arithmetik in K zugrunde liegt, zwangsläufig aus dem bewertungstheoretischen Ansatz, und seine Kennzeichnung in der bisher üblichen Weise, durch den Koeffizienten der algebraischen Gleichungen, erscheint als ein Satz, nicht als Definition“ (S. 221).

Hinsichtlich der großen Fülle des verarbeiteten Stoffes verdient besondere Hervorhebung, die für das Studium des Werkes glückliche Art, in der die Analogie der algebraischen Funktionenkörper mit derjenigen der algebraischen Zahlkörper dargestellt wird. Allen Abschnitten, in denen das wegen der anzubringenden Änderungen notwendig ist, wird der arithmetischen Theorie der algebraischen Zahlkörper ein Anhang mit derjenigen der algebraischen Funktionenkörper einer Unbestimmten hinzugefügt.

Eine abschließende Bemerkung, die den Bereich der Betrachtungen des mathematischen Inhalts überschreitet und eine Betrachtung über das Wesen dieses mathematischen Inhaltes ist, erscheint mir zur Gesamtkarakterisierung zweckmäßig: das Werk als Ganzes ist dank seiner überlegenen Gedankenführung (z. B. bezüglich der Einordnung der älteren elementaren Zahlentheorie) ein klarer Ausdruck für die tiefgehenden Änderungen, die sich in der Aufgabenstellung und logischen Grundlegung der Zahlentheorie vollzogen haben. In der Bezeichnung „neuere“ Zahlentheorie steckt wesentlich mehr, als dieses Wort vermuten läßt, steckt eine Strukturänderung, die sich als Übergang von Größen zu Formen kennzeichnen läßt und von der ein anderer Autor einmal sagt: „Das Reich der mathematischen Größen kann den mächtigen Zug zur Form nicht verbergen; es ist, als brähe seine Sehnsucht nach Form um so unbezwinglicher hervor, je mehr seine unlogische Seele sich verleugnen will.“ Wenn ein rein mathematisches Werk, in dem von mathematischer Philosophie explizite mit keinem Worte die Rede ist, dem aufmerksamen Leser auch diese weitesten Perspektiven erschließt, so ist das ein weiterer Vorzug, der überdies eindrucksvoller wirkt als in einem großen Teil der Literatur zur Philosophie der Mathematik.

Dresden.

M. Draeger.

Dr. P. Luckey (Oberstudienrat i. R.), *Nomographie*. (Mathematisch-physikalische Bibliothek, Reihe I Nr. 59/60) 6. Aufl. 107 S. m. 57 Abb. Leipzig 1949. Verlagsgesellschaft B. G. Teubner. Preis kart. 4,20 DM.

Das treffliche kleine Bändchen, das im wesentlichen seit der in Bd. 8 (1928), S. 497 dieser Zeitschrift besprochenen zweiten Auflage unverändert blieb, erscheint jetzt in sechster, vom Verfasser nicht durchgesehener Auflage. Auch so bleibt es eine gute Einführung in die Nomographie, die sich vor allem zum Selbststudium eignet.

Dresden.

Willers.

Dr. K. L. Schecher und Studienrat Dr. K. Seebach (Privatdozent a. d. Techn. Hochschule München), *Einführung in die Mathematik*. Ein Lehrbuch für Selbstunterricht und Wiederholung. Bd. I. 288 S. m. 408 Abb. Legelshurst (Baden) 1950. Verlag Dr. Schecher & Co. KG. Preis geb. 13,— DM.

Das Werk ist dreibändig vorgesehen und soll von der Elementarmathematik bis zu den Differentialgleichungen einschl. führen. Der erste Band enthält elementare Arithmetik, Algebra und Geometrie sowie ebene und sphärische Trigonometrie. Es will als „Lehrbuch für Selbstunterricht und Wiederholung“ gelten. Diesem Zweck abträglich ist die wenig übersichtliche

und daher schlecht einprägsame äußere Aufmachung. Die wichtigsten Ergebnisse usw. hätten drucktechnisch besser hervorgehoben werden müssen. Die Darstellung wirkt dadurch eintönig und ermüdend. An dem geometrischen Teil ist zu bedauern, daß er durchweg in dem heute veralteten Stile euklidischer Darstellung gehalten ist und manchen entbehrlichen Ballast enthält.

Einige Einzelheiten, die bei einer Neuauflage der Korrektur bedürfen, seien noch herausgegriffen: S. 13: daB „ $3a + 2b$ nicht weiter zusammenfaßbar ist“, an der Nichtaddierbarkeit von 3 Hasen und 2 Äpfeln zu erklären, ist nicht angängig. Die Buchstaben haben die Bedeutung von Zahlen und nicht von Benennungen. — Auf S. 24 wird nicht klar, was $a^0 = 1$ ist: eine Definition, ein Grundsatz oder ein beweisbarer Satz. Gerade darauf aber kommt es für den Fortgang und für die Einsicht in das Wesen der Mathematik sehr an. — S. 29: Die imaginären Zahlen als „die nicht wirklichen, die nur in der Vorstellung existierenden“ einzuführen, bedeutet die Verewigung längst überholter Irrtümer. — Auf S. 178 f werden die Winkelfunktionen als Strecken definiert; sie sind aber reine Zahlen und daher die Maßzahlen jener Strecken.

Dresden.

M. Draeger.

Hans Wehner, Untersuchung mikrobarographischer Wellen auf Jan Mayen (Veröffentlichungen des Geophysikalischen Institutes der Univ. Leipzig. Herausgegeben von W. Hesse. 2. Serie: Spezialarbeiten aus dem Geophysikalischen Institut und Observatorium, Bd. XVI, Heft 1). 56 S. mit 12 Abb. u. 9 Tabellen. Berlin 1949. Akademie-Verlag. Brosch. 7,50 DM.

Verf. weist nach, daß die auf der Insel Jan Mayen registrierten kurzperiodischen Druckschwankungen dynamischen Ursprungs sind. Zu ihrer Erklärung benutzt er eine Karmansche Wirbelstraße und zeigt, daß die Beobachtungen die Stabilitätskriterien einer solchen erfüllen. Die Schwankungen sind Auswirkungen lokaler Verhältnisse. Die von dieser Station gemeldeten Druck- und Windwerte brauchen daher nicht immer repräsentativ für die Großwetterlage zu sein.

Dresden.

Willers.

Dr.-Ing. Gerhard Grüß (o. Prof. an der Bergakademie Freiberg), Differential- und Integralrechnung. (Mathematik und ihre Anwendung in Physik und Technik. Herausgegeben von E. Kamke und A. Kratzer. Reihe A, Bd. 21). XV u. 642 S. m. 355 Abb. Leipzig 1949. Akademische Verlagsgesellschaft. Preis geb. 39,— DM.

Ein gutes Buch über Differential- und Integralrechnung können wir in Anbetracht des immer stärker werdenden Interesses für den Gegenstand immer noch gebrauchen. Eine gewisse Konkurrenz wird auch hier ganz nützlich sein. Das vorliegende Buch hält Ref. für durchaus konkurrenzfähig. Es bringt den Stoff, den jeder Studierende der Mathematik, der Physik und der Technik zu allererst kennen lernen muß, in ansprechender, ja eindringlicher und anschaulicher Vortragsweise, 355 Abb. erleichtern das Verständnis. Numerische und instrumentelle Methoden werden angemessen vorgebracht. Auch sie sollte ja jeder Anfänger kennen lernen, auch der Studierende an der Universität. Was die Strenge anbetrifft, so erscheint sie Ref. für eine Anfängervorlesung durchaus genügend. Das Buch wurzelt, wie Verf. selbst in der Vorrede sagt, in der Ära der Cauchy-Weierstraßschen Mathematik. In dieser Beziehung hätte Ref. einen Vorschlag zu machen. Bei der Einführung der Exponentialfunktion wird diese zwar durchaus richtig erklärt, dann aber wegen des Beweises des Additionstheorems auf § 34.1 verwiesen, wo das einfacher geschehen werde (S. 65). An der genannten Stelle aber findet man zwar eine rein arithmetische Theorie der trigonometrischen Funktionen vom Integral aus, hinsichtlich der Exponentialfunktion aber nur auf Seite 388 eine kleingedruckte Bemerkung,

daß man den Logarithmus und also auch die Exponentialfunktion vom Integral aus begründen könne, ohne daß dies wirklich geschieht. Hier klappt zweifellos eine Lücke, die Ref. zu schließen vorschlägt. Am besten an beiden Stellen; es ist ja auch gar nicht so schwer.

Das Buch gliedert sich in neun Kapitel: 1. Die Grundlagen: Zahl und Funktion. 2. Die elementaren Funktionen. 3. Grenzwert und Stetigkeit. 4. Differentialrechnung. 5. Integralrechnung. 6. Weiterer Ausbau der Lehre vom bestimmten Integral. 7. Taylorsche Formel und Taylorsche Reihe. 8. Unendliche Reihen. 9. Geometrische Anwendungen der Infinitesimalrechnung. Es handelt sich also im wesentlichen um Funktionen einer Variablen; von komplexen Größen wird nur einmal, bei der Partialbruchzerlegung, ein kurzer Gebrauch gemacht.

Landshut.

Hamel.

Wilhelm Scholler, Die mittlere Entfernung eines Punktes von einer Fläche. (Thünen-Archiv der Universität Rostock: Beiträge zur Thünen-Forschung. Herausgeber Prof. Dr. E. Schlesinger u. Prof. Dr. A. Petersen. Heft 2.) 79 S. mit 33 Abb. Berlin 1949. Akademie-Verlag. Brosch. 12,50 DM.

Das für Nicht-Mathematiker geschriebene Heft stellt die von Thünen auf bestimmte Dreiecke angewandte Methode der Auswertung des Doppelintegrals zur Berechnung der mittleren Weglänge bezogen auf einen Eckpunkt ausführlich dar und erweitert sie auf geradlinig begrenzte Flächenstücke und Kreise auch bei anderen Lagen des Bezugspunktes. Die Darstellung ist vielfach ungeschickt und nicht fehlerfrei. Nur kurz wird erwähnt, daß das Integral, das heute in der Siedlungsplanung viel verwendet wird einen besonderen Namen „Vial“ bekommen hat, und man zu seiner Auswertung für beliebig begrenzte Flächenstücke und beliebige Lage des Bezugspunktes in der Praxis Umfahrungsplanimeter mit Gleitkurventrieb verwendet, deren Genauigkeit durchaus dem praktischen Bedürfnis entspricht.

Dresden.

Willers.

Dr.-Ing. habil. Otto Luetkens, Die Methoden der Rahmenstatik, Aufbau, Zusammenfassung und Kritik. VII + 281 S. mit 38 Abb. und 9 Zahlentafeln. Berlin—Göttingen—Heidelberg 1949. Springer-Verlag. Preis brosch. 33,— DM, geb. 36,— DM.

Die Literatur zur Statik des Stabwerks hat teils durch die zahlreichen technischen Probleme, die der Stahlbau und der Stahlbetonbau in den Jahrzehnten einer stürmischen bautechnischen Entwicklung gestellt haben, teils durch die unterschiedliche wissenschaftliche oder berufliche Einstellung der Ingenieure einen Umfang angenommen, der nicht ihrem Inhalt entspricht. Das Ziel der Lösung ist, ebenso wie in der Elastizitätstheorie im allgemeinen, der Spannungs- und Verschiebungszustand des Tragwerks und seine Stabilität. Die zahlreichen Arbeiten unterscheiden sich im wesentlichen allein durch die Lösung der Ansätze und die Vereinfachung von Rechenvorschriften. Auf diese Weise enthält die bautechnische Literatur zahlreiche Arbeiten, die oft nur neue Methoden vortäuschen. Daher hat sich der Verfasser auf Grund großer Sachkenntnis und praktischer Erfahrung die Aufgabe gestellt, die zahlreichen Methoden der Rahmenstatik gedanklich zusammenzufassen und ihren Aufbau kritisch zu sichten. Er beschäftigt sich zunächst mit den Hilfsmitteln, den Bezeichnungen, den Beziehungen zwischen den inneren Kräften und der Formänderung des Tragwerks und behandelt ausführlich die mechanischen und geometrischen Verträglichkeitsbedingungen als Grundlage der Rechnung. Ihre Auflösung führt zu den allgemeinen Methoden der Elimination und Iteration von statisch unbestimmten Schnittkräften oder

geometrisch unbestimmten Komponenten des Verschiebungszustandes aus linearen Gleichungen und ihre Vereinfachung bei einfacher, mehrfacher und zyklischer Symmetrie des Tragwerks durch Umordnung der äußeren Kräfte. Hieraus haben sich die zahlreichen Verfahren der Baustatik ergeben, die unter dem Namen Ausgleichsverfahren, Abklüppungsverfahren usw. bekannt sind und oft nur in einer Approximation der Lösung bestehen, die den technischen Zweck erfüllt. Diese Methoden werden erörtert, auf viel verwendete Tragwerke angewendet, durch gut gewählte Zahlenbeispiele erläutert und vor allem auf ihre Brauchbarkeit geprüft. Darin liegen Bedeutung und Eigenart des Buches, mit dem sich der Verfasser den Dank vieler Ingenieure erwerben wird, die für die Baustatik und ihre Zusammenhänge Interesse besitzen und neue Erkenntnisse für ihre beruflichen Arbeiten suchen.

Dresden.

K. Beyer.

Dr.-Ing. habil. Ernst Eckert, Einführung in den Wärme- und Stoffaustausch. VII + 203 S. mit 125 Abb. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1949. Springer-Verlag. Preis brosch. 21,— DM, geb. 24,— DM.

Das vorliegende Buch behandelt die Wärmeübertragung durch Leitung, Konvektion und Strahlung. Dem Stoffaustausch ist nur am Schluß ein kurzer Abschnitt über Dampf-Luftgemische und den Diffu-

sionsvorgang bei der Verdunstung gewidmet. Das Kennzeichnende der Behandlung des Wärmeaustausches ist die Anwendung der Prandtl'schen Grenzschichttheorie auf den konvektiven Wärmeübergang in Verbindung mit der Kärnänschen Näherungslösung im Gegensatz zu der sonst in der Literatur bevorzugten Ähnlichkeitsmethode. Die Benutzung der Grenzschichttheorie ist daher besonders dankenswert, zumal sie in außerordentlich klarer und überzeugender Weise dargestellt ist. Weniger gelungen ist dagegen die anschließend allzu summarisch behandelte Ähnlichkeitstheorie. Den gleichen Einwand kann man gegen die Darstellung der Gasstrahlung innerhalb des Abschnittes Wärmestrahlung erheben, zumal gerade diese zu dem engeren Forschungsgebiete des Verfassers gehört. Es wäre vielleicht im Interesse des sonst vorzüglichen Buches besser gewesen, zugunsten einer ausführlicheren Darstellung der technisch so wichtigen Gasstrahlung auf den im Hinblick auf den Buchtitel enttäuschenden Abschnitt Stoffaustausch zu verzichten. Der Stoff wird belebt und vertieft durch eine große Anzahl gut ausgewählter Rechnungsbeispiele. Eine umfangreiche Tafelsammlung von Wärmeleitwerten und Zähigkeitswerten beschließt das den Fachkollegen empfehlenswerte Buch.

Dresden.

H. Faltin.

Die besprochenen und angezeigten Bücher sind durch den Buchhandel zu beziehen.

EINGEGANGENE BÜCHER

Bei der Schriftleitung sind folgende Bücher eingegangen (ausführliche Besprechung bleibt vorbehalten)

Dr. Ernst Hölder (Prof. a. d. Univ. Leipzig), Über die Variationsprinzipien der Mechanik der Kontinua. (Berichte über die Verhandlungen der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig, Math. Naturwiss. Klasse, Band 97, Heft 2) 13 S. Berlin 1950. Akademie-Verlag. Preis brosch. 2,75 DM.

Dr. phil. habil. H. Gebelein, Zahl und Wirklichkeit. Grundzüge einer mathematischen Statistik. Zweite Auflage. XII + 430 S. mit 52 Abb. Heidelberg 1949. Quelle & Meyer. Preis 12,— DM.

Prof. Dr. Friedrich Tölke, Mechanik deformierbarer Körper. Erster Band: Der punktförmige Körper. VIII + 388 S. mit 339 Abb. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1949. Springer-Verlag. Preis geb. 45,— DM.

Otto Toeplitz, Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung nach der genetischen Methode. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften i. Einzeldarst. Bd. LVI.) Erster Band: Aus dem Nachlaß herausgegeben von G. Köthe. IX + 181 S. mit 148 Abb. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1949. Springer-Verlag. Preis brosch. 19,60 DM., geb. 22,60 DM.

Dr. G. Hamel (em. o. Prof. a. d. Techn. Univ. Berlin), Theoretische Mechanik. Eine einheitliche Einführung in die gesamte Mechanik. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen. Band LVII.) XVI + 796 S. mit 161 Abb. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1949. Springer-Verlag. Preis brosch. 63,— DM., geb. 66,— DM.

Dr. Friedrich Hund (o. Prof. a. d. Univ. Jena), Einführung in die Theoretische Physik. Vierter Band: Theorie der Wärme. (Meyers Kleine Handbücher, Band 54/55.) 330 S. m. 46 Abb. Leipzig 1950. Bibliographisches Institut VEB. Preis brosch. 5,80 DM.

G. Truesdell, An essay toward a Unified Theory of Special Functions. (Annals of Mathematics Studies Number 18.) IV + 182 S. Princeton 1948. Princeton University Press. Preis 3,— \$

Electromagnetic Theory (Proceedings of the second Symposium in Applied Mathematics of the American Mathematical Society). 91 S. mit 8 Abb. New York 1950. American Mathematical Society. Preis geb. 3,— \$

Dr. W. Weitzel, Lehrbuch der theoretischen Physik. Erster Band: Physik der Vorgänge, Bewegung, Elektrizität, Licht, Wärme. XIV + 771 S. m. 270 Abb. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1949. Springer-Verlag. Preis geheftet 53,— DM, geb. 56,90 DM.

Veröffentlichungen des Institutes für Erdmessungen, Band VI, Teil 1 u. 2. Beiträge zur Lotabweichungsausgleichung und Geoidbestimmung. (Allgemeine Betrachtung und Durchführung im Bereich des Zentraleuropäischen Netzes.) 106 S. m. 2 Abb. und 25 Tafeln, Bamberg 1949. Bamberger Verlagshaus Meisenbach & Co. Preis 5,— DM.

Dr. sc. techn. Edward R. van Driest, Die linearisierte Theorie der dreidimensionalen kompressiblen Unterschallströmung und die experimentelle Untersuchung von Rotationskörpern in einem geschlossenen Windkanal. (Mitteilungen aus dem Institut für Aerodynamik an der eidgen. Techn. Hochschule in Zürich. Herausgegeben von Prof. Dr. J. Ackeret. Nr. 16.) 31 S. m. 22 Abb. Zürich 1949. Verlag Leemann. Preis brosch. 7,— fr.

Dr. sc. techn. William T. Sawyer, Experimental Investigation of a Stationary Cascade of Aerodynamic Profiles. (Mitteilungen aus dem Institut für Aerodynamik an der

eidgen. Techn. Hochschule in Zürich. Herausgegeben von Prof. Dr. J. Ackeret. Nr. 17.) 78 S. m. 45 Abb. Zürich 1949. Verlag Leemann. Preis brosch. 12,— fr.

Dr.-Ing. habil. **Alf Pflüger** (Prof. a. d. Techn. Hochschule Hannover), *Stabilitätsprobleme der Elastostatik*. VIII + 339 S. m. 389 Abb. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1950. Springer-Verlag. Preis geb. 34,50 DM.

Hans Jönck, *Mechanik und Festigkeitslehre*. Fünfte Auflage. 280 S. mit 322 Abb. Braunschweig 1950. Friedr. Vieweg & Sohn. Preis geb. 7,80 DM.

Prof. Dr. **R. Rothe**, *Höhere Mathematik für Mathematiker, Physiker, Ingenieure*. Teil V, Formelsammlung unter Mitwirkung von Stud.-Rat Oscar Degosang und Dr.-Ing. Gerhard Dobbrack (Teubners Mathem. Leitfäden Bd. 43). Zweite Auflage, 124 S. mit 74 Abb. Leipzig 1949. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft. Preis kart. 4,— DM.

Festschrift zur 125-Jahrfeier des Physikalischen Vereins zu Frankfurt am Main 1949. Herausgegeben im Auftrage

des Vorstandes des Physikalischen Vereines von Dr. Ludwig Protz. 47 S.

Veröffentlichungen des Instituts für Erdmessung:

- 1 — Das Zentraleuropäische Dreiecksnetz, Grundlagen. 122 S., 5 Tafeln. Bamberg 1949. Bamberger Verlagshaus Meisenbach & Co. Preis brosch. 4,— DM.
- 3 — Professor Hans Boltz und sein Werk. 77 S. Bamberg 1949. Bamberger Verlagshaus Meisenbach & Co. Preis brosch. 3,— DM.
- 4 — Beiträge zur Ausgleichung astronomisch-geodätischer Netze, unter besonderer Berücksichtigung des Zentraleuropäischen Netzes. 143 S. mit 4 Abb. Bamberg 1949. Verlagshaus Meisenbach & Co. Preis brosch. 4,— DM.
- 9 — Beiträge zur Zentrierung von Richtungen. 47 S. mit 6 Abb. Bamberg 1949. Bamberger Verlagshaus Meisenbach & Co. Preis brosch. 3,— DM.

NACHRICHTEN

Tagung der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik vom 16. bis 19. April 1950 in Darmstadt

In der Zeit vom 16. bis 19. April fand in Darmstadt die diesjährige Tagung der GaMM statt. Der Besuch dieser Tagung war außerordentlich stark. Nicht weniger als 240 Mitglieder und Nichtmitglieder der Gesellschaft aus dem In- und Auslande hatten sich eingefunden. Rund 60 Vorträge wurden gehalten, so daß es sich leider erforderlich machte, Parallelsitzungen einzurichten. Dieser Schönheitsfehler wurde dadurch gemildert, daß sich jeder an Hand der gedruckt vorliegenden kurzen Vortragsauszüge die Vorträge anschauen konnte, die ihn besonders interessierten, und daß die Vortragszeiten so festgesetzt waren, daß ein Hinüberwechseln von der einen zur anderen Gruppe möglich war.

Schon im Laufe des Sonntages hatten sich eine Reihe von Tagungsteilnehmern eingefunden, die zu einem zwanglosen Begrüßungsabend in der Mensa der Hochschule zusammenkamen. In der Eröffnungssitzung am Montag morgen wurden die Erschienenen durch den Vorsitzenden der GaMM der amerikanischen Besatzungszone Herr Grammel-Stuttgart, Herrn Marguerre-Darmstadt in Vertretung des erkrankten Rektors der Hochschule und Herrn Metzger, dem Oberbürgermeister der Stadt Darmstadt begrüßt. Anschließend sprach Prof. Walther-Darmstadt über Stand und Probleme der angewandten Mathematik, und es wurde ein ausführlicher Bericht von Prof. Hartree-Cambridge, der leider am Erscheinen verhindert war, über automatische Rechenmaschinen von H.-J. Dreyer-Darmstadt verlesen. Daran schlossen sich die Vorträge:

C. Weber, Schlewecke: Randverformung einer Halbebene mit Normalbelastung.

W. Gross, Rom: Über eine neue Integrationsmethode für lineare partielle Differentialgleichungssysteme und ihre Anwendung auf das Gleichgewichtsproblem einer Brücke.

C. Torre, Wien: Anwendung der zyklographischen Abbildung in der Bruchtheorie.

Am Nachmittag tagten nebeneinander die Sektion für Mechanik und die für Stochastik (Wahrscheinlichkeitsrechnung und Mathematische Statistik). In der ersten wurden die folgenden Vorträge gehalten:

W. Haacke, Braunschweig: Untersuchungen über die Stabilisierung eines Doppelpendels mit periodisch erschüttertem Aufhängepunkt.

H. Jung, Stuttgart: Über eine neue Iterationsmethode zur Berechnung der Knicklast.

H. Münz, Braunschweig: Zur Berechnung schwach gewölbter, kreissymmetrischer Platten.

F. Weidenhammer, Clausthal: Der eingespante, axial-pulsierende, belastete Stab als Stabilitätsproblem.

W. Lode, Leverkusen: Zur thermokinetischen Theorie der Elastomere.

M. Bergsträßer, Bingen: V-Verzahnung mit großen Profilverschiebungen.

O. Heck, Wiesbaden: Beitrag zur analytischen Behandlung des Kurbeltriebes.

In der Sektion Stochastik sprachen:

H. Münzner, Göttingen: Die Methoden der mathematischen Statistik.

W. Ludwig, Heidelberg: Biomathematik (Anwendung mathematischer, insbesondere stochastischer Methoden in der Biologie).

K. Freudenberg, Berlin: Medizinische Statistik.

H. Kellerer, München: Ausgewählte Probleme der Wirtschafts- und soziologischen Statistik.

M. P. Geppert, Bad Nauheim: Mathematisch-statistische Fragen der Fabrikationskontrolle.

Am nächsten Vormittag fand zunächst die Hauptversammlung der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik statt. Diese war deswegen außerordentlich bedeutsam, weil sich in ihr die beiden Gesellschaften der englischen und amerikanischen Zone zu einer Gesellschaft zusammenschlossen. Damit besteht wieder die GaMM in ihrer alten Form. Da Prof. Prandtl, Göttingen, der langjährige Vorsitzende der Gesellschaft, wegen seines hohen Alters die Übernahme des Vorsitzes ablehnte, wurde Prof. Grammel, Stuttgart, auf drei Jahre zum Vorsitzenden und Prof. Prandtl, Göttingen, zum Ehrenvorsitzenden auf Lebenszeit gewählt. Beide Wahlen erfolgten einstimmig.

Sodann wurden unter dem Vorsitz von Prof. Grammel die Statuten der neuen Gesellschaft, die in allen wesentlichen Punkten mit denen der alten Gesellschaft übereinstimmen, besprochen und ge-

genehmigt. Entsprechend diesen Statuten wurden Prof. Walther, Darmstadt, zum stellvertretenden Vorsitzenden, Prof. Görtler, Freiburg, zum Schriftführer einstimmig gewählt. Weiter erfolgte die Wahl des wissenschaftlichen Beirates, der 5–7 Mitglieder umfassen soll. Er setzt sich zusammen aus: Prof. Betz, Göttingen, Prof. L. Föppl, München, Prof. Pöschl, Karlsruhe, Prof. E. Schmidt, Braunschweig, Prof. G. Schulz, Aachen, Prof. C. Weber, Schlewecke und Prof. Fr. A. Willers, Dresden. Zu Kassenprüfern wurden Prof. Sauer, München, und Prof. Vogel-pohl, Göttingen, gewählt.

Die Mitgliederbeiträge wurden für das Jahr 1950 und 1951 auf je 5,— DM festgesetzt; doch wurde dem Vorstand die Ermächtigung erteilt, diesen Beitrag für das Jahr 1951, falls es die Lage gestattet, herabzusetzen und ihn in einzelnen Fällen zu ermäßigen oder erlassen. Nichtmitglieder der GaMM, die an dieser Tagung teilnahmen, wurden gebeten, einen entsprechenden Betrag als Tagungsbeitrag einzuzahlen. Sodann wurde über den Ort der nächsten Tagung, die wieder im Frühjahr stattfinden soll, gesprochen, der Beschluß gefaßt, möglichst bald die Satzungen und ein Mitgliederverzeichnis drucken zu lassen und von den Preisermäßigungen Kenntnis gegeben, die den Mitgliedern der GaMM für den Bezug einzelner Zeitschriften und Bücher zustehen. Die Gesellschaft tritt dem fachwissenschaftlichen Beirat des deutschen Forschungsrates bei.

Nach Beendigung der Hauptversammlung nahm man wieder die wissenschaftliche Arbeit auf. Nebeneinander tagten die Sektion für Elastokinetik, in der folgende Vorträge gehalten wurden:

K. Ludwig, Hannover: Der Massenpunkt mit konstanter Horizontalgeschwindigkeit auf dem beiderseits unbegrenzten, elastisch gebetteten Geleis mit Reibung.

Th. Schade, Aachen: Neuartige Behandlung der Poissonschen und der inhomogenen Bipotentialgleichung bei rechteckigen Bereichen mit Anwendung auf Probleme der Torsion in der Plattenbiegung.

W. Zerna, Hannover: Allgemeine Theorie elastischer Flächenträger ohne Bernoullische Annahme.

W. Swida, Karlsruhe: Plattengleichungen für den elastisch-plastischen Zustand.

J. Weinhold, Holzgerlingen: Eine näherungsweise Integration der Differentialgleichung $y'' = f(y)$ bei Druckbiegeproblemen.

U. Wegner, Heidelberg: Variationsmethoden zur praktischen Lösung von ebenen und räumlichen Spannungsproblemen.

O. Emersleben, Berlin: Über Berechnung der Gitterenergie endlicher Kristallstücke, und die Sektion für Mathematische Maschinen und Instrumente:

W. Bader, Stuttgart: Auflösung von Polynomgleichungen auf elektrischem Wege (mit Vorführung).

H.-J. Dreyer, Darmstadt: Automatisches lichtelektrisches Kurvenabtasten bei Integrieranlagen.

K. Zuse, Neukirchen: Programmgesteuerte Rechenmaschinen in Deutschland.

Th. Fromme, Weil/Rhein: Die Schachmaschine.
K. Ramsayer, Stuttgart: Die Funktionsrechenmaschine.

Am Nachmittag sprachen in der Gruppe Strömungslehre:

W. Barth, Nonnenborn: Modellversuche mit wasserdurchströmten Zyklonabscheidern zur Vorausbestimmung der Abscheideleistung.

M. Strscheletzky, Kreßbrunn: Strömung im Übergangsraum der Wasserturbinen.

W. Richter, Frankenthal: Lösung einer Aufgabe über Strömung in Leitungs-Systemen.

M. Herbeck, Göttingen: Der Wärmeaustausch zwischen einem geheizten Band und einer Konvektionsströmung.

K. Nickel, Tübingen: Über ein Minimumproblem aus der Tragflügeltheorie.

H. Calame, Karlsruhe: Der Einfluß von Staubgröße und Staubsichte auf die Druckverhältnisse bei beschleunigten Strömungen.

N. Scholz, Braunschweig: Ein einfaches Singularitätenverfahren zur Erzeugung von Schaufelgittern.

E. Pieruschka, Kassel: Die mathematischen Grundlagen zu einer Meßmethode des Schubmoduls zäher Flüssigkeiten.

und in der Gruppe Mathematik:

E. Ullrich, Gießen: Ausgezeichnete Betragflächen analytischer Funktionen.

J. Heinhold, München: Schmiegunungsverfahren der konformen Abbildung.

F. Löbell, München: Eine reelle Deutung komplexer Vektoren.

H. Buchholz, Darmstadt: Die Entwicklung beschränkt willkürlicher Funktionen nach den Eigenfunktionen des Ringparabols.

Anschließend wurde das Institut für Praktische Mathematik (Mathematische Instrumente, Unterrichtsmodelle, Lösungsmethoden linearer Gleichungssysteme, Integrieranlage, Rechnen mit Dualzahlen) besichtigt.

Am Mittwoch Vormittag setzte die Gruppe für Strömungslehre ihre Sitzungen fort. Es sprachen:

H. Görtler, Freiburg: Über die Lösungen nichtlinearer partieller Differentialgleichungen vom Reibungsschichttypus.

K. Schröder, Berlin: Bemerkungen zum Differenzenverfahren bei der Berechnung der laminaren Grenzschicht.

H. Schubert, Rostock: Über ein gemischtes räumliches Randwertproblem der Potentialtheorie.

H. Behrboom, Waldkirch: Zum Schalldurchgang in zwei- und dreidimensionalen Düsenströmungen.

H. Richter, Haltingen: Die Stoßherzkurve bei allgemeiner Zustandsgleichung.

Fr. Wecken, Haltingen: Expansion einer Gasgugel hohen Druckes.

M. Schäfer, Göttingen: Über die Berechnung von kleinen stationären Störungen in einer gemischten Überschall-Unterschall-Strömung mittels einer einheitlichen Charakteristikenmethode.

In der parallel stattfindenden Sitzung Praktische Analysis wurde zunächst ein von J. C. P. Miller, London, angesagter Vortrag: Survey of Aids to Computation in deutscher Übersetzung von H. Unger, Darmstadt, verlesen. Es folgten die weiteren Vorträge:

W. Schnell, Darmstadt: Interpolation im Komplexen.

A. van Wijngaarden, Amsterdam: Grundsätzliche Probleme der Abrundungsfehler.

W. Quade, Karlsruhe: Grundsätzliches zur numerischen Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen.

J. Weissinger, Hamburg: Zur Fehlerabschätzung bei der numerischen Integration (Differenzenverfahren) gewöhnlicher Differentialgleichungen.

E. Weinelt, Jena: Bemerkungen zum Verfahren von Runge und Kutta,

L. Collatz, Hannover: Über die Konvergenzkriterien bei Iterationsverfahren für lineare Gleichungssysteme.

H. Sassenfeld, Darmstadt: Zur Iteration bei linearen Gleichungssystemen.

H. Unger, Darmstadt: Nichtlineare Behandlung von Eigenwertaufgaben bei Matrizen.

J. N. Lehmann, Dresden: Zur Praxis der Eigenwerteingrenzung.

R. Zurmühl, Darmstadt: Zum Graeffe-Verfahren bei komplexen Wurzeln.

L. Schwarz, Oberwolfach: Methoden zur Theorie der Integraltransformationen.

Bei allen Tagungen sind die Aussprachen zwischen den einzelnen Teilnehmern mindestens ebenso wichtig wie die Vorträge und die anschließenden Diskussionen. Zu solchen Aussprachen war reichlich Gelegenheit gegeben. Eine Einladung der Stadt Darmstadt vereinte eine große Zahl der Teilnehmer bei einem Empfang, der in wiederhergestellten Ausstellungsräumen auf der Mathildenhöhe am Montagabend stattfand, bis spät in die Nacht. Am Dienstagabend fand eine Festvorstellung im Landestheater: „Richard Wagner, Die Meistersinger von Nürnberg“ statt, und am Mittwoch nachmittag wurde ein Ausflug an die Bergstraße mit gemeinsamer Kaffeetafel in Seeheim und Abendessen in Jugenheim gemacht. Die Obstbäume standen in voller Blüte und das Wetter erlaubte, daß der Kaffee im Freien eingenommen werden konnte. Die noch am Donnerstag anwesenden Teilnehmer führen zur Besichtigung des Werkes der Firma Adam Opel, Rüsselsheim oder der MAN, Gustavsburg und trafen sich am Nachmittag zur Besichtigung der Sektkellerei Burgeff in Hochheim. Diesen Firmen sei auch hier für die Einladung zu diesen außerordentlich interessierenden Besichtigungen herzlich gedankt. Zum Schluß wiederhole ich im Namen aller Teilnehmer den mehrfach ausgesprochenen Dank für die mühevollen Vorbereitung und die gute Organisation, die von Herrn Walther und seinen Mitarbeitern durchgeführt wurde. Die Tagung wurde infolge dieser ausgezeichneten Vorbereitung eine der schönsten Tagungen der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik.

Dresden.

Willers.

Felix Klein-Feier in Göttingen

Die Reden, die von Kneser, Lietzmann und Prandtl bei der Felix-Klein-Feier gehalten wurden, sind in einem Heft des Göttinger Universitätsbundes abgedruckt. Der Preis beträgt einschl. Porto und Briefumschlag 0,65 DM. Das Mathematische Institut der Universität Göttingen schickt nach Einzahlung dieses Betrages das Heft zu.

Tagung der deutschen Mathematiker-Vereinigung in Köln

Bei dem Bericht über die Tagung der deutschen Mathematiker-Vereinigung in Köln ist durch ein bedauerliches Versehen der Vortrag von F. Löbell-München: „Einige Begriffsbildungen der Theorie der Flächenabbildungen“ unerwähnt geblieben. Kame.

Berlin: Der o. Prof. an der Techn. Universität Berlin, Dr. G. Hamel, wurde am 1. Juli 1949 emeritiert.

Dresden: Der persönliche o. Prof. an der Universität Jena, Dr. K. Maruhn, wurde zum Professor mit Lehrstuhl für das Fach der reinen Mathematik an der Techn. Hochschule Dresden ernannt.

Greifswald: Der Dozent, Dr. phil. R. Kochendorfer, wurde zum Professor mit vollem Lehrauftrag für das Gebiet der Mathematik an der Universität Greifswald ernannt.

München: Studienrat Dr. rer. nat. K. Seebach habilitierte sich an der Techn. Hochschule München für reine und angewandte Mathematik.

Am 2. Februar 1950 verstarb im Alter von 76 Jahren der o. Prof. an der Universität München, Dr. Constantin Carathéodory.

Würzburg: Prof. Dr. G. Aumann wurde zum o. Prof. der Mathematik an der Universität Greifswald ernannt.

Hamburg: Mitte März verstarb der Honorarprofessor der Univ. Hamburg Dr. Paul Riebesell, Präsident der Hamburger Feuerkasse.

Druckfehlerberichtigung

P. Funk, „Über die Berechnung der kritischen Drehzahlen bei homogenen und fast homogenen Maschinen“. Z. angew. Math. Mech. 15 (1935) 113–120.

In Fußnote 3 der genannten Arbeit liegt eine Verwechslung vor und außerdem kann der Text der Fußnote zu einem Mißverständnis Anlaß geben. An Stelle des Satzes:

„Bei dem Beweis beruft sich Grammel gelegentlich auf die Mitwirkung von O. Perron.“

Soll es heißen:

„Bei dem Beweis eines Hilfssatzes zu den von Herrn Grammel dort aufgestellten und bewiesenen Sätzen beruft sich Herr Grammel anläßlich des Beweises eines Hilfssatzes auf die Mitwirkung von Herrn Perron“. Ich sehe mich zu dieser Berichtigung um so mehr veranlaßt, da die Anlage der algebraischen Beweise ausschließlich von Herrn Grammel herrühren und weil dies bei der ursprünglichen Abfassung des Textes nicht genügend deutlich zum Ausdruck kommt.

Wien.

P. Funk.

Paul Lorenz: Herleitung einer Näherungsformel von Laplace für die Binomialverteilung ohne Grenzübergang. Z. angew. Math. Mech. 29 (1949), S. 368–374.

S. 373 unten. Der Satz „Ferner ist ... Problem.“ ist zu ändern in „Ferner beseitige ich die Glieder

$+ \frac{1}{2}$ im Exponenten durch eine Parallelverschiebung, ändere aber aus schreibtechnischen Gründen die Bezeichnung nicht.“

Ebenda letzte Zeile. „0“ ist zu ersetzen durch „ $\frac{k}{2}$ “.

S. 374, Zeile 13, ebenso.

Ebenda. Zu der Formel (13) tritt der Faktor $e^{\frac{k^2}{8n}}$.

Ebenda, 4 Zeilen weiter. Hinter „... Formel über.“ ist einzufügen „Bei Vernachlässigung der Glieder

$+ \frac{1}{2}$ entfällt $e^{\frac{k^2}{8n}}$.“

Ebenda, Zeile 10. Statt X_2 muß es heißen X_2^2 ; zweimal.

Lorenz.

Verantwortlich für den Inhalt: Prof. Dr. Fr. A. Willers, Dresden; für den Verlag: H. Kaesser, Berlin. Verlag: Akademie-Verlag GmbH, Berlin, NW 7, Schiffbauerdamm 19, Fernsprecher: Sammelnummer 425571. Postscheckkonto: Berlin 35 021. Bestell- und Verlagsnummer dieses Heftes: 1009/30 5/6. Die Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik erscheint monatlich. Bezugspreis: vierteljährlich RM 15.— zuzüglich Bestellgeld, Einzelheft RM 6.—. Abbestellungen können nur bis 4 Wochen vor Quartalsende anerkannt werden, anderenfalls wird das folgende Quartal noch geliefert. Verantwortlich für den Anzeigenteil: Curt F. W. Schreiber, Berlin. Druck: Treuhandbetrieb Julius Beltz, Langensalza. 57273/4022 — Nr. 417. — Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 245 der Sowjetischen Militär-Verwaltung in Deutschland.